



Article info

Type of article:

Original research paper

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2026.vn.6.4.18-29>

***Corresponding author:**

Email address:

vuminhduc@tdtu.edu.vn

Received: 07/01/2026

Received in Revised Form:

28/01/2026

Accepted: 30/01/2026

Dynamic Buckling of Stiffened FG-GRC and FG-GLRC Cylindrical and Toroidal Shell Segments under Axial Compression

Nguyen Thi Phuong^{1,2}, Vu Minh Duc^{1,2,*},

Tran Quang Minh³, Pham Thanh Hieu³, Vu Tho Hung³

¹Mechanics of Advanced Materials and Structures, Institute for Advanced Study in Technology, Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Vietnam

²Faculty of Civil Engineering, Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Vietnam

³Mechanics of Advanced Materials and Structures, University of Transport Technology, Hanoi, Vietnam

*Corresponding author: Vu Minh Duc, Email: vuminhduc@tdtu.edu.vn

Abstract: This study focuses on analyzing the dynamic buckling behavior of axially compressed cylindrical shells and toroidal shell segments made of functionally graded graphene reinforced composite (FG-GRC) and functionally graded graphene platelet reinforced composite (FG-GLRC). These structures are stiffened by orthogonal and spiral stiffeners, which are also made of the corresponding FG-GRC and FG-GLRC. The fundamental expressions and equations are established based on Donnell shell theory, taking into account von Kármán geometrical nonlinearity. The extended smeared stiffener technique is utilized to estimate the stiffness contributions of the stiffeners. By using the stress function approach and the energy method, the equation of motion is derived and subsequently solved using the Runge-Kutta method. The dynamic critical buckling loads are determined according to the Budiansky-Roth criterion. Numerical results are presented to investigate the effects of stiffeners, geometric, and material parameters on the dynamic buckling behavior of the shells.

Keywords: Toroidal shell segment, Graphene reinforced composite, Dynamic stability, Energy method, Donnell shell theory.



Thông tin bài viết
Dạng bài viết:
Bài báo nghiên cứu

DOI:
<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2026.vn.6.1.18-29>

*Tác giả liên hệ:
Địa chỉ Email:
vuminhduc@tdtu.edu.vn

Ngày nộp bài: 07/01/2026
Ngày nộp bài sửa: 28/01/2026
Ngày chấp nhận: 30/01/2026

Ổn định động lực của vỏ trụ và vỏ trống FG-GRC và FG-GPLRC có gân tăng cứng chịu nén dọc trục

Nguyễn Thị Phương^{1,2}, Vũ Minh Đức^{1,2,*},

Trần Quang Minh³, Phạm Thanh Hiếu³, Vũ Thọ Hưng³

¹Phòng nghiên cứu Cơ học vật liệu và Kết cấu tiên tiến, Viện Công nghệ tiên tiến, Trường Đại học Tôn Đức Thắng, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Khoa Kỹ thuật công trình, Trường Đại học Tôn Đức Thắng, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

³Nhóm nghiên cứu Cơ học vật liệu và Kết cấu tiên tiến, Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, Hà Nội, Việt Nam

Tóm tắt: Nghiên cứu này tập trung phân tích ổn định động lực của kết cấu vỏ trụ và vỏ trống chịu nén dọc trục làm bằng composite gia cường graphene sheet (functionally graded graphene reinforced composite - viết tắt là FG-GRC) và bằng composite gia cường graphene platelet (functionally graded graphene platelet reinforced composite - viết tắt là FG-GPLRC) và được có gân trục giao và xoắn ốc tăng cứng cũng được làm từ vật liệu FG-GRC và FG-GPLRC tương ứng. Các biểu thức và phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên lý thuyết vỏ Donnell có tính đến tính phi tuyến hình học của von Kármán. Các độ cứng của kết cấu có gân tăng cứng được xác định dựa trên mô hình san ảnh hưởng gân mở rộng. Bằng cách áp dụng hàm ứng suất và phương pháp năng lượng phương trình chuyển động theo thời gian có thể nhận được. Từ đó áp dụng thuật toán Runge-Kutta để giải nhằm khảo sát đáp ứng phi tuyến động lực, tiếp theo tải tới hạn động được xác định bằng điều kiện Budiansky-Roth. Các khảo sát số được thực hiện để đánh giá ảnh hưởng của gân tăng cứng, các thông số vật liệu và hình học tới đáp ứng ổn định động lực của vỏ.

Từ khóa: Vỏ trống, Composite gia cường graphene, Ổn định động lực, Phương pháp năng lượng; Lý thuyết vỏ Donnell.

1. Mở đầu

Trong những năm gần đây, các kết cấu làm từ vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) đã thu hút được sự quan tâm đáng kể trong cộng đồng nghiên cứu do khả năng phân bố tính chất vật liệu một cách liên tục theo chiều dày, giúp gia tăng khả năng chịu tải. Nhiều công bố đã được thực hiện nhằm dự báo ổn định và dao động vỏ trụ FGM với nhiều trường hợp về tải trọng và điều kiện biên. Sử dụng lý

thuyết vỏ Donnell, Wang và nhóm nghiên cứu [1] đã phân tích tác động từ độ võng không hoàn hảo tới bài toán ổn định nhiệt của vỏ trụ có lớp phủ mặt FGM theo mô hình Koiter và phương pháp Galerkin. Sofiyev và Hui [2] sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT) để phân tích ổn định và dao động của vỏ trụ FGM chịu áp suất ngoài với điều kiện biên hỗn hợp. Gần đây, Cao và Hu [3] đã mở rộng phân tích tới trường hợp có từ trường và

tải kéo dọc trục, tập trung vào hiện tượng cộng hưởng tham số chính trong bài toán nhiệt-từ-đàn hồi của vỏ trụ FGM. Ở một hướng nghiên cứu khác, Bích và nhóm nghiên cứu [4] tập trung vào bài toán phi tuyến mất ổn định tĩnh và động của vỏ trụ FGM có gân tăng cứng trục giao đẳng hướng và độ võng không hoàn hảo ban đầu, chịu tải nén dọc trục bằng cách áp dụng mô hình san ảnh hưởng gân của Lekhnitskii. Tiếp sau đó, bằng cách cải tiến mô hình san ảnh hưởng gân truyền thống, Nam và nhóm nghiên cứu [5] đã nghiên cứu ứng xử ổn định và sau mất ổn định tĩnh của vỏ trụ FGM nhiều lớp, tăng cứng bằng các gân FGM xoắn ốc và đặt trong môi trường nền đàn hồi, chịu tải xoắn.

Bên cạnh các nghiên cứu về vỏ trụ FGM truyền thống, gần đây xu hướng sử dụng composite gia cường graphene platelet cơ tính biến thiên (FG-GPLRC) đang nổi lên như một hướng nghiên cứu đầy hứa hẹn nhờ sự kết hợp giữa khả năng phân bố tối ưu tính chất vật liệu và hiệu suất cơ học vượt trội của graphene platelet. Ansari và Torabi [6] đã phân tích bài toán phi tuyến ổn định tĩnh vỏ trụ FG-GPLRC theo FSDT, bằng cách sử dụng chuỗi Fourier và phương pháp sai phân đạo hàm biến phân (VDQ). Trong khi đó, Li và nhóm nghiên cứu [7] khảo sát đáp ứng dao động của vỏ trụ FG-GPLRC nhiều lớp dưới tác động của tải trọng ngẫu nhiên di động bằng cách sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn vi tích phân (DQFEM) kết hợp với phương pháp kích thích giả (PEM). Yang và nhóm nghiên cứu [8] sử dụng FSDT để khảo sát dao động tự do và ổn định của vỏ trụ FG-GPLRC quay lệch tâm. Về mặt ứng xử phi tuyến, Hòa và nhóm nghiên cứu [9] đã nghiên cứu hiện tượng mất ổn định và sau mất ổn định tĩnh của vỏ trụ FG-GPLRC tăng cứng bằng gân xoắn ốc, chịu tải xoắn. Gần đây, Nam và nhóm nghiên cứu [10] đã đa dạng hóa phạm vi nghiên cứu tới vỏ trống FG-GPLRC với độ cong kinh tuyến tùy ý, có gân tăng cứng xoắn ốc, đặt trong nền đàn hồi, dưới tác dụng của tải trọng xuyên tâm.

Composite cơ tính biến thiên gia cường graphene sheet (FG-GRC) là loại vật liệu

composite nhiều lớp trong đó graphene sheet được gia cường theo hướng trong từng lớp, tạo nên đặc tính dị hướng và hiệu suất cơ học cao. Shen và Xiang [11,12] đã nghiên cứu ứng xử ổn định tĩnh phi tuyến của vỏ trụ FG-GRC chịu áp suất ngoài hoặc nén trục có xét tới nhiệt độ tăng đều, bằng lý thuyết biến dạng trượt bậc ba (HSDT) và kỹ thuật nhiều hai bước. Nam và nhóm nghiên cứu [13] mở rộng các nghiên cứu về gân FGM và gân FG-GPLRC cho gân FG-GRC bằng cách sử dụng lý thuyết dầm dị hướng và áp dụng cho trường hợp ổn định phi tuyến tĩnh của vỏ trụ FG-GRC có gân FG-GRC chịu nén dọc trục. Ngoài ra, Đoàn và nhóm nghiên cứu [14] đã nghiên cứu bài toán ổn định xoắn - điện - nhiệt tĩnh phi tuyến của vỏ trống FG-GRC có gân tăng cứng. Gần đây nhất, Nam và nhóm nghiên cứu [15] đã khảo sát ứng xử mất ổn định của vỏ trống FG-GRC với nền kim loại và độ cong kinh tuyến phức tạp có gân tăng cứng xoắn ốc. Từ các nghiên cứu trên có thể thấy rằng, phần lớn các nghiên cứu hiện nay mới chỉ tập trung vào bài toán tĩnh về ổn định hoặc sau mất ổn định của các vỏ FG-GPLRC và FG-GRC có gân tăng cứng.

Trong khi đó, các nghiên cứu liên quan đến ổn định động lực phi tuyến, đặc biệt dưới tác dụng của tải trọng nén dọc trục biến thiên theo thời gian, vẫn còn rất hạn chế. Thực tế, đây là bài toán có ý nghĩa thiết thực trong thiết kế kết cấu chịu tải nhanh hoặc xung kích, nhưng lại chưa được khảo sát một cách có hệ thống và toàn diện. Vì vậy, nghiên cứu này được thực hiện nhằm xây dựng lời giải để phân tích ổn định phi tuyến động của vỏ trụ và vỏ trống FG-GPLRC và FG-GRC có gân, chịu nén dọc trục biến thiên theo thời gian. Mô hình được xây dựng dựa trên lý thuyết vỏ Donnell với phi tuyến hình học von Kármán, kết hợp với mô hình san ảnh hưởng mở rộng và phương pháp năng lượng. Phương trình chuyển động thu được được giải bằng thuật toán Runge-Kutta, và tải tới hạn động được xác định thông qua điều kiện Budiansky-Roth. Nghiên cứu cũng đánh giá tác động của tính chất vật liệu, hình học và gân tăng cứng đến ứng xử ổn định động lực, từ đó bổ sung

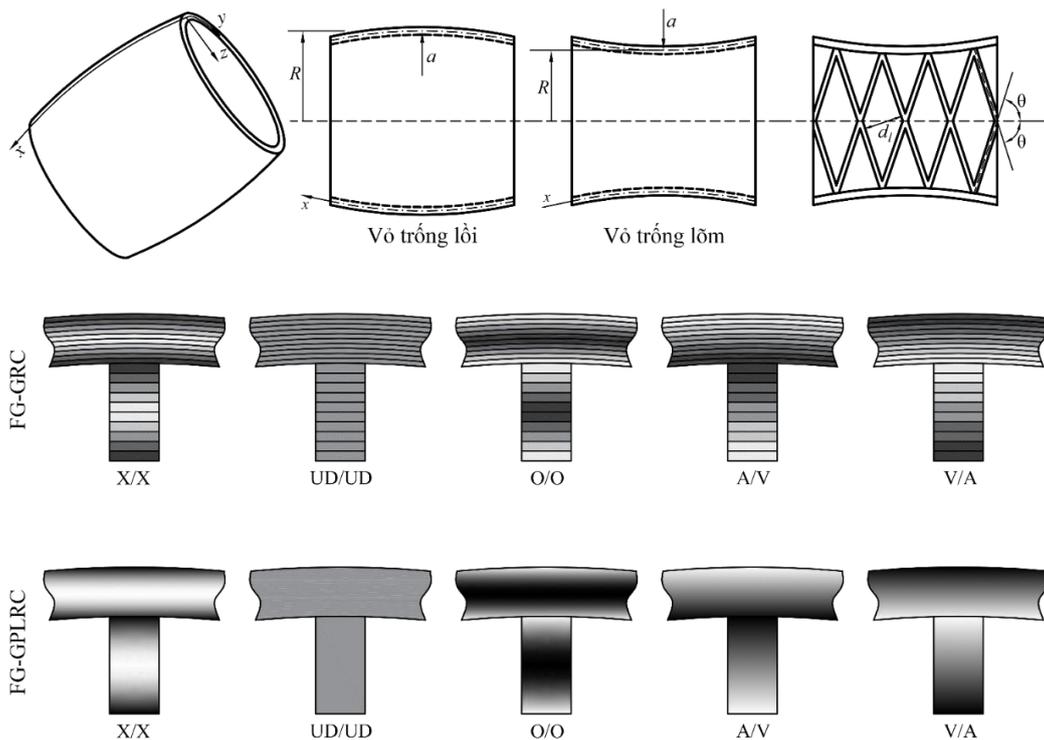
nền tảng lý luận phục vụ thiết kế kỹ thuật các kết cấu vỏ composite tiên tiến.

2. Mô hình vỏ trụ và trống FG-GRC và FG-GPLRC có gân FG-GRC và FG-GPLRC

Xét vỏ trụ và vỏ trống FG-GRC và FG-GPLRC có gân tăng cứng chịu nén dọc trục phân bố đều trên diện tích cạnh có cường độ r_0 với bán kính vòng R , bề dày h , bán kính dọc a , và chiều dài L như quan sát trên Hình 1. Hệ trục tọa độ $Oxyz$ được chọn như hình vẽ, với gốc tọa độ được đặt trên mặt trung bình tại cạnh của vỏ. Trục Ox được đặt theo hướng kinh tuyến, trục Oy theo hướng vòng, và Oz theo hướng hướng tâm của vỏ. Vỏ được gia cường bởi các gân kinh tuyến, gân vòng và gân xoắn ốc. Chiều cao, bề rộng, khoảng cách của gân kinh tuyến, gân vòng, gân xoắn ốc được ký hiệu $h_s, h_r, h_l, b_s, b_r, b_l$, và d_s, d_r, d_l tương ứng.

Trong bài báo này, để đơn giản, các thông số của các loại gân được xem xét là bằng nhau trong các trường hợp khảo sát, tức là $h_s=h_r=h_l=h_{ST}$, $b_s=b_r=b_l=b_{ST}$ và $d_s=d_r=d_l=d_{ST}$.

Liên hệ giữa góc xiên θ của gân xoắn ốc với trục Ox , và số lượng gân n_l và khoảng cách giữa các gân d_l được biểu diễn bởi $\theta = \arccos \frac{n_l d_l}{2\pi R}$. Với FG-GRC, để đơn giản cho quy trình chế tạo, hệ gân vòng và gân kinh tuyến có thể được đề xuất với cùng các thông số độ dày, cùng số lớp GRC và cùng tỷ lệ thể tích của graphene. Cũng để đơn giản, nghiên cứu này chỉ xét trường hợp graphene trong tất cả các lớp đều được sắp xếp với hướng dọc cạnh zigzag theo hướng kinh tuyến của vỏ. Tỷ lệ thể tích của graphene sheet thay đổi theo năm quy luật: FG-X, FG-V, FG-O, UD, và FG- Λ [12].



Hình 1. Hệ tọa độ, hình dạng và phân bố FG-GRC và FG-GPLRC của vỏ trống có gân

Theo công thức Halpin–Tsai mở rộng, các mô đun Young và trượt hiệu dụng của FG-GRC được biểu diễn như sau:

$$E_1 = \frac{(1+2\kappa_G \gamma_1^G V_G / \tau_G) E^m \eta_1}{1-\gamma_1^G V_G};$$

$$E_2 = \frac{(1+2\beta_G \gamma_2^G V_G / \tau_G) E^m \eta_2}{1-\gamma_2^G V_G}; G_{12} = \frac{\eta_3 G^m}{1-\gamma_{12}^G V_G}, \quad (1)$$

trong đó κ_G, β_G và τ_G theo thứ tự là các thông số hiệu dụng của chiều dài, rộng và độ dày của graphene sheet. E^m và G^m là các mô đun Young và trượt của nền polymer đẳng hướng, E_1^G, E_2^G và G_{12}^G là mô đun Young và mô đun trượt của graphene sheet. Tỷ lệ thể tích được ký hiệu lần lượt là V_G và V_m cho graphene và nền, với $V_G+V_m=1$. Các thông

số hiệu dụng của graphene η_j ($j=1, 2, 3$) có thể thu được tương ứng với tỷ lệ thể tích của graphene V_G . Có thể dự đoán được hệ số Poisson của GRC bằng biểu thức sau:

$$v_{12} = V_G v_{12}^G + V_m v^m. \quad (2)$$

Với FG-GPLRC, tỷ lệ thể tích của graphene platelet thay đổi theo năm quy luật: FG-X, FG-V, FG-O, UD, và FG- Λ . Để hạn chế sự bong tách giữa các gân và vỏ, tính liên tục của vật liệu cần được bảo đảm. Do đó, các gân FG-GPLRC được đề xuất, trong đó lớp vỏ và gân có cùng tỷ lệ thể tích graphene sheet tại bề mặt tiếp xúc.

Với cả FG-GRC và FG-GPLRC, ba trường hợp vỏ/gân được đề xuất như sau: vỏ UD, FG-X, FG-O được kết hợp với gân UD, FG-X, FG-O tương ứng, tạo nên ba trường hợp phân bố X/X, UD/UD và O/O. Tuy nhiên, vỏ FG- Λ kết hợp gân FG-V và vỏ FG-V được kết hợp với gân FG- Λ , tạo nên hai trường hợp phân bố A/V và V/A.

Phần mở rộng công thức Halpin-Tsai được áp dụng để ước lượng mô đun Young của vỏ và gân, như sau

$$E_f(z) = \frac{3T_1 K_1 \bar{V}_{GPL}(z) + 3}{8 - 8T_1 \bar{V}_{GPL}(z)} E_m + \frac{5T_2 K_2 \bar{V}_{GPL}(z) + 5}{8 - 8T_2 \bar{V}_{GPL}(z)} E_m \quad (3)$$

Trong đó:

$$T_1 = \frac{\frac{E_{GPL} - 1}{E_m}}{\frac{E_{GPL}}{E_m} + K_1}, T_2 = \frac{\frac{E_{GPL} - 1}{E_m}}{\frac{E_{GPL}}{E_m} + K_2}, K_1 = \frac{2a_{GPL}}{t_{GPL}}, K_2 = \frac{2b_{GPL}}{t_{GPL}},$$

trong đó E_m và E_{GPL} theo thứ tự là mô đun Young của nền và graphene platelet. Các chiều dài, rộng và dày của graphene platelet được ký hiệu lần lượt là a_{GPL} , b_{GPL} , và t_{GPL} , và \bar{V}_{GPL} là phần thể tích của graphene platelet.

Năm kiểu phân bố graphene platelet tương ứng được thiết kế như sau:

- Kiểu UD (vỏ UD và gân UD)

+) Với vỏ: $\bar{W}_{GPL} = W_{GPL}$ (4)

+) Với gân: $\bar{W}_{GPL} = W_{GPL}$ (5)

- Kiểu FG-X (vỏ FG-X và gân FG-X)

+) Với vỏ: $\bar{W}_{GPL} = \frac{4|z|W_{GPL}}{h}$ (6)

+) Với gân: $\bar{W}_{GPL} = \left[\left| \frac{(2h-4z)}{h_{ST}} + 2 \right| \right] W_{GPL}$ (7)

- Kiểu FG-O (vỏ FG-O và gân FG-O)

+) Với vỏ: $\bar{W}_{GPL} = \left(\frac{2-4|z|}{h} \right) W_{GPL}$ (8)

+) Với gân: $\bar{W}_{GPL} = \left[2 - \left| \frac{(4z-2h)}{h_{ST}} - 2 \right| \right] W_{GPL}$ (9)

+) Với vỏ: $\bar{W}_{GPL} = \left(\frac{1-2z}{h} \right) W_{GPL}$ (10)

+) Với gân: $\bar{W}_{GPL} = \left[\frac{(2z-h)}{h_{ST}} \right] W_{GPL}$ (11)

- Kiểu FG-V (vỏ FG-V và gân FG- Λ)

+) Với vỏ: $\bar{W}_{GPL} = \left(\frac{1+2z}{h} \right) W_{GPL}$ (12)

+) Với gân: $\bar{W}_{GPL} = \left[\frac{2+(h-2z)}{h_{ST}} \right] W_{GPL}$ (13)

trong đó $z \in \left[\frac{h}{2}, \frac{h}{2} + h_{ST} \right]$ cho gân và $z \in \left[\frac{-h}{2}, \frac{h}{2} \right]$ cho vỏ, và tỷ lệ khối lượng tổng cộng của graphene platelet được ký hiệu là W_{GPL} .

Hệ số Poisson của vỏ và gân được xác định dựa trên biểu thức nội suy thể tích, biểu diễn bởi

$$v(z) = v_m (1 - \bar{V}_{GPL}) + v_{GPL} \bar{V}_{GPL} \quad (14)$$

Thông số của vật liệu cấu thành FG-GRC và FG-GPLRC được tham khảo trong các nghiên cứu trước đây [8, 12].

3. Các phương trình cơ bản

Trong nghiên cứu này, lý thuyết vỏ Donnell với tính phi tuyến hình học của von Karman được sử dụng để thiết lập các phương trình cơ bản cho khảo sát ổn định động lực của vỏ trống và trụ FG-GRC và FG-GPLRC, chịu tải nén dọc trục. Biến dạng theo chiều dày của vỏ tại một khoảng cách z từ mặt trung hòa được biểu diễn bởi

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \omega_{,xx} \\ \omega_{,yy} \\ 2\omega_{,xy} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

trong đó ϵ_x^0 và ϵ_y^0 là các thành phần biến dạng pháp, γ_{xy}^0 là biến dạng trượt trong mặt phẳng tại mặt trung bình của vỏ, và

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} - \frac{\omega}{a} + \frac{\omega_{,x}^2}{2 + \omega_{,x} \omega_{0,x}} \\ \omega_{,y} \omega_{0,y} - \frac{\omega}{R} + v_{,y} + \frac{\omega_{,y}^2}{2} \\ v_{,x} + \omega_{,y} \omega_{0,x} + \omega_{,x} \omega_{,y} + \omega_{,x} \omega_{0,y} + u_{,y} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

Trong đó $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $\omega = \omega(x, y)$ là các chuyển vị theo phương x, y và z tương ứng.

Phương trình tương thích biến dạng của vỏ nhận được từ phương trình (16), như sau

$$-\gamma_{xy,xy}^0 + \epsilon_{x,yy}^0 + \epsilon_{y,xx}^0 = \omega_{,xy}^2 - \omega_{,xx}\omega_{,yy} - \frac{1}{a}\omega_{,yy} - \omega_{,xx}\omega_{0,yy} - \frac{1}{R}\omega_{,xx} - \omega_{0,xx}\omega_{,yy} + 2\omega_{,xy}\omega_{0,xy} \quad (17)$$

Quan hệ ứng suất–biến dạng theo định luật Hooke đối với vỏ trụ và vỏ trống FG-GRC và FG-GPLRC được biểu diễn bởi

$$\sigma_x = Q_{11}\epsilon_x + Q_{12}\epsilon_y, \sigma_y = Q_{12}\epsilon_x + Q_{22}\epsilon_y, \sigma_{xy} = Q_{66}\gamma_{xy} \quad (18)$$

Trong đó với FG-GRC

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{66} = G_{12},$$

và với FG-GPLRC

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, Q_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu^2(z)},$$

$$Q_{66} = \frac{1}{2} \frac{E(z)}{1+\nu(z)},$$

Các biểu thức lực và mô men của vỏ trong hệ tọa độ toàn cục được viết như sau

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \epsilon_x - \omega_{,xx} \\ \epsilon_y - \omega_{,yy} \\ \epsilon_{xy} - 2\omega_{,xy} \end{bmatrix} \quad (19)$$

trong đó

$$A_{11} = A_{11}^{sh} + \mu_1 A_{11}^s + 2\mu_2 A_{11}^l c^4, A_{22} = A_{22}^{sh} + \mu_1 A_{22}^r + 2\mu_2 A_{11}^l s^4,$$

$$A_{12} = A_{12}^{sh} + 2\mu_2 A_{11}^l s^2 c^2, A_{66} = A_{66}^{sh} + 2\mu_2 A_{11}^l s^2 c^2,$$

$$B_{11} = B_{11}^{sh} + \mu_1 B_{11}^s + 2\mu_2 B_{11}^l c^4, B_{22} = B_{22}^{sh} + \mu_1 B_{22}^r + 2\mu_2 B_{11}^l s^4,$$

$$B_{12} = B_{12}^{sh} + 2\mu_2 B_{11}^l s^2 c^2, B_{66} = B_{66}^{sh} + 2\mu_2 B_{11}^l s^2 c^2,$$

$$D_{11} = D_{11}^{sh} + \mu_1 D_{11}^s + 2\mu_2 D_{11}^l c^4, D_{22} = D_{22}^{sh} + \mu_1 D_{22}^r + 2\mu_2 D_{11}^l s^4,$$

$$D_{12} = D_{12}^{sh} + 2\mu_2 D_{11}^l s^2 c^2, D_{66} = D_{66}^{sh} + 2\mu_2 D_{11}^l s^2 c^2,$$

$$s = \sin \theta, c = \cos \theta,$$

trong đó μ_1 và μ_2 là các hệ số thể hiện sự có mặt của các loại gân, $\mu_1 = 1$ và $\mu_2 = 0$ ứng với trường hợp gân trục giao, $\mu_1 = 0$ và $\mu_2 = 1$ ứng với trường hợp gân xoắn ốc, $\mu_1 = 0$ và $\mu_2 = 0$ ứng với trường hợp vỏ không gân.

$$(A_{ij}^{sh}, B_{ij}^{sh}, D_{ij}^{sh}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(1, z, z^2) dz, (i, j = 1, 2, 6)$$

và các độ cứng của gân kinh tuyến và gân xiên $A_{11}^{(s,l)}, B_{11}^{(s,l)}, D_{11}^{(s,l)}$ có thể nhận được như sau

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(s,l)} & B_{11}^{(s,l)} \\ B_{11}^{(s,l)} & D_{11}^{(s,l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & 0 & \bar{B}_{22} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & \bar{B}_{66} \\ \bar{B}_{22} & 0 & \bar{D}_{22} & 0 \\ 0 & \bar{B}_{66} & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & \bar{B}_{12} \\ 0 & 0 \\ \bar{B}_{12} & \bar{D}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

trong đó:

$$(\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{D}_{ij}) = \frac{b_{(s,l)}}{d_{(s,l)}} \int_{\frac{h}{2}}^{2+h(s,l)} Q_{ij}(1, z, z^2) dz, (i, j = 1, 2, 6) \quad (21)$$

Lưu ý rằng: Các độ cứng của gân vòng $A_{22}^r, B_{22}^r, D_{22}^r$ thu được bằng cách đổi chỉ số dưới “11” bằng “22” và chỉ số dưới “22” bằng “11” trong phương trình (20, 21), $b_{(s,l)}, d_{(s,l)}$ được thay thế bằng b_r, d_r .

$$\begin{aligned} F_{11}^* &= F_{11} - C_{11}C_{11}^* - C_{12}C_{21}^*, F_{22}^* = F_{22} + C_{12}C_{12}^* - C_{22}C_{22}^*, \\ F_{12}^* &= F_{12} - C_{11}C_{12}^* - C_{12}C_{22}^*, F_{21}^* = F_{12} - C_{12}C_{11}^* - C_{22}C_{21}^*, \\ F_{66}^* &= F_{66} - C_{66}C_{66}^*, F_{14}^* = C_{11}B_{22}^* - C_{12}B_{21}^*, F_{24}^* = C_{12}B_{11}^* - C_{11}B_{12}^*, \\ F_{15}^* &= C_{12}B_{22}^* - C_{22}B_{12}^*, F_{25}^* = C_{22}B_{11}^* - C_{12}B_{12}^*. \end{aligned} \quad (22)$$

Hàm ứng suất Airy $\varphi(x, y)$ có thể đưa vào nhằm thỏa mãn các điều kiện sau đây

$$N_x = \varphi_{,yy}, \quad N_y = \varphi_{,xx}, \quad N_{xy} = -\varphi_{,xy}. \quad (23)$$

Từ phương trình (23), phương trình (17) được viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} &A_{22}^* \varphi_{,xxxx} + (A_{66}^* + 2A_{12}^*) \varphi_{,xxyy} + A_{11}^* \varphi_{,yyyy} + B_{21}^* \omega_{,xxxx} \\ &+ (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \omega_{,xxyy} + B_{12}^* \omega_{,yyyy} - \omega_{,xy}^2 + \omega_{,xx} \omega_{,yy} \\ &+ \frac{1}{R} \omega_{,xx} + \frac{1}{a} \omega_{,yy} + \omega_{,xx} \omega_{0,yy} + \omega_{0,xx} \omega_{,yy} - 2\omega_{,xy} \omega_{0,xy} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

trong đó

$$A_{11}^* = \frac{A_{22}}{\Delta}, A_{22}^* = \frac{A_{11}}{\Delta}, A_{12}^* = -\frac{A_{12}}{\Delta}, A_{66}^* = \frac{1}{A_{66}},$$

$$B_{11}^* = A_{11}^* B_{11} + A_{12}^* B_{12}, B_{22}^* = A_{22}^* B_{22} + A_{12}^* B_{12},$$

$$B_{12}^* = A_{11}^* B_{12} + A_{12}^* B_{22},$$

$$B_{21}^* = A_{22}^* B_{12} + A_{12}^* B_{11}, B_{66}^* = \frac{B_{66}}{A_{66}}, \Delta = A_{11} A_{22} - A_{12}^2$$

4. Dạng nghiệm độ võng và quá trình giải

Xét vỏ trống và trụ FG-GRC và FG-GPLRC chịu nén dọc đường sinh với biên tựa tự do ở hai cạnh đáy. Dạng nghiệm giải tích cho độ võng có thể được chọn dưới dạng xấp xỉ như sau

$$[\omega, \omega_0] = [\omega, \xi h] \sin \alpha x \sin \beta y. \quad (25)$$

trong đó $\alpha = \frac{m\pi}{L}; \beta = \frac{n}{R}$, và độ võng không hoàn hảo được giả thiết có dạng tương tự độ võng của vỏ, với ξ là biên độ không hoàn hảo.

Thế nghiệm độ võng không hoàn hảo và độ võng (25) vào phương trình (24) để nhận được hàm ứng suất như sau:

$$\varphi = \varphi_3 \sin \alpha x \sin \beta y + \varphi_2 \cos 2 \beta y + \varphi_1 \cos 2 \alpha x - r_0 h \frac{y^2}{2}, \quad (26)$$

trong đó

$$\varphi_1 = \frac{\beta^2}{32\alpha^2 A_{22}^*} W(2h\xi + W), \varphi_2 = \frac{\alpha^2}{32\beta^2 A_{11}^*} W(2h\xi + W),$$

$$\varphi_3 = - \frac{\alpha^4 B_{21}^* + \alpha^2 \beta^2 B_{11}^* + \alpha^2 \beta^2 B_{22}^* - 2\alpha^2 \beta^2 B_{66}^* + \beta^4 B_{12}^* - \frac{\alpha^2}{R} - \frac{\beta^2}{a}}{\alpha^4 A_{22}^* + (2A_{12}^* + A_{66}^*) \beta^2 \alpha^2 + A_{11}^* \beta^4} W$$

Hàm Lagrange có thể được áp dụng như sau

$$\bar{U}_{Total} = \bar{U}_t - \bar{U}_{in} + \bar{U}_{ext} \quad (27)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi của vỏ được tính bằng

$$\bar{U}_{in} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (\sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y) dx dy dz \quad (28)$$

Công của lực ngoài do tải nén dọc trục có thể được biểu diễn bởi

$$\bar{U}_{ext} = -r_0 h \int_0^{2\pi R} \int_0^L (\epsilon_{0x} + \frac{\omega}{a} - \frac{1}{2} \omega_{,x}^2 - \omega_{,x} \omega_{0,x}) dx dy \quad (29)$$

Thế năng động học của vỏ được tính bằng biểu thức

$$\bar{U}_t = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \rho(z) \omega_t^2 dx dy dz \quad (30)$$

Phương trình chuyển động được suy ra bằng cách áp dụng công thức Euler-Lagrange, như sau

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{U}_{Total}}{\partial \dot{W}} \right) - \frac{\partial \bar{U}_{Total}}{\partial W} = 0, \quad (31)$$

dẫn đến

$$I_1 \ddot{W} + HW - r_0 h \alpha^2 (h\xi + W) + KW(2h\xi + W)(h\xi + W) = 0 \quad (32)$$

trong đó

$$H = \frac{\left((\alpha^4 B_{21}^* + \beta^2 (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \alpha^2 + \beta^4 B_{12}^*) a - \beta^2 \right) R - a \alpha^2}{a^2 R^2 [A_{22}^* \alpha^4 + (2A_{12}^* + A_{66}^*) \beta^2 \alpha^2 + A_{11}^* \beta^4]}$$

$$\alpha^4 F_{11}^* - \beta^2 (F_{12}^* + F_{21}^* + 4F_{66}^*) \alpha^2 - \beta^4 F_{22}^*,$$

$$K = \frac{A_{22}^* \alpha^4 + A_{11}^* \beta^4}{16 A_{22}^* A_{11}^*},$$

$$I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz + \mu_1 \frac{b_s}{d_s} \int_{\frac{h}{2}}^{2+h_s} \rho(z) dz +$$

$$\mu_1 \frac{b_r}{d_r} \int_{\frac{h}{2}}^{2+h_r} \rho(z) dz + 2 \mu_2 \frac{b_l}{d_l} \int_{\frac{h}{2}}^{2+h_l} \rho(z) dz$$

Vỏ trống và vỏ trụ FG-GRC và FG-GPLRC được xem xét chịu nén dọc trục tăng theo thời gian một cách tuyến tính $r_0 = ct$ với vận tốc gia tải rất lớn c (Pa/s). Phương trình chuyển động (32) được giải bằng thuật toán Runge-Kutta và tải tới hạn động nhận được bằng cách áp dụng điều kiện ổn định Budiansky-Roth.

Tải mất ổn định cận trên tĩnh thu được nếu bỏ qua các số hạng phi tuyến, độ không hoàn hảo và quán tính trong phương trình (32), nhận được

$$r_0^{upper} = \frac{H}{\alpha^2 h} \quad (33)$$

Trong mọi mode mất ổn định, bài toán tĩnh về tải tới hạn nhận được bằng cách lấy giá trị nhỏ nhất trong tất cả các tải mất ổn định cận trên.

5. Khảo sát số và thảo luận

Tải tới hạn r_0^{cr} của vỏ trụ FG-GRC được so sánh với báo cáo của Shen và Xiang [12], sử dụng HSDT với kỹ thuật nhiễu hai bước (xem Bảng 1). Các kết quả so sánh cho thấy sự phù hợp tốt của kết quả của bài báo với của Shen và Xiang [12].

Bảng 1. So sánh tải tới hạn tĩnh nén dọc trục $r_0^{cr} h$ (in kN) của vỏ trụ FG-GRC với các kích thước hình học khác nhau ($\frac{R}{h}=20, h=2$ mm).

L ² /Rh	Shen và Xiang [12]		Present	
	UD	FG-X	UD	FG-X
100	1056.72 (2;4)*	1116.33 (2;4)	1107.81 (2;4)	1194.79 (2;4)
300	1098.08 (3;4)	1167.68 (3;4)	1143.80 (3;4)	1238.44 (3;4)
500	1087.11 (4;4)	1154.36 (4;4)	1133.55 (4;4)	1226.10 (4;4)

* Mode mất ổn định (m;n).

Bảng 2 thể hiện kết quả so sánh tải tới hạn tĩnh và tải tới hạn động của vỏ trụ và vỏ trống FG-GRC với ba cấu hình gân: không gân, trực giao và xoắn ốc, dưới tác dụng của tải nén dọc trục với các vận tốc gia tải khác nhau. Kết quả cho thấy rằng, đối với cả ba dạng hình học (vỏ trụ, vỏ trống lồi và vỏ trống lõm), tải tới hạn động luôn cao hơn tải tới hạn tĩnh, và giá trị này tăng khi vận tốc gia tải tăng. Điều này phản ánh rõ hiệu ứng quán tính trong ổn định động lực phi tuyến khác biệt với bài toán ổn định tĩnh.

Đặc biệt, việc bổ sung gân tăng cứng làm

tăng mạnh cường độ ổn định của kết cấu. Gân xoắn ốc cho hiệu quả cao nhất trong tất cả các trường hợp, tiếp theo là gân trực giao, và cuối cùng là kết cấu không gân. Sự chênh lệch rõ rệt giữa các cấu hình gân cũng cho thấy rằng hướng và kiểu phân bố gân có ảnh hưởng lớn đến độ cứng tổng thể và khả năng chịu tải động của vỏ. Một điểm đáng chú ý là vỏ trống lồi có tải tới hạn cao hơn vỏ trụ, trong khi vỏ trống lõm có tải tới hạn thấp nhất. Điều này cho thấy độ cong kinh tuyến của vỏ cũng là yếu tố quan trọng ảnh hưởng đến độ ổn định động lực.

Bảng 2: Tải tới hạn nén dọc trục động và tĩnh của vỏ trụ và vỏ trống FG-GRC không có và có gân (GPa, V/Λ , $h = 2$ mm, $R=80h$, $L=1.5R$, $b_r=b_s=b_l=h$, $h_r=h_s=h_l=1.5h$, $d_r=d_s=d_l=24$ mm)

	Loại gân	Tĩnh	Động	
			$c = 10^9$ (Pa/s)	$c = 2 \times 10^9$ (Pa/s)
Vỏ trống lồi ($a=4R$)	Không gân	0.499 (7;6) ^a	0.501 (7;6)	0.502 (7;6)
	Trực giao	0.823 (4;7)	0.825 (4;7)	0.828 (4;7)
	Xoắn ốc	1.193 (4;6;38;24.88) ^b	1.196 (4;6;38;24.88)	1.200 (4;6;38;24.88)
Vỏ trụ ($a=\infty$)	Không gân	0.454 (4;8)	0.457 (4;8)	0.459 (4;8)
	Trực giao	0.695 (3;6)	0.698 (3;6)	0.700 (3;6)
	Xoắn ốc	0.874 (1;5;33;38.02)	0.884 (1;5;33;38.02)	0.891 (1;5;33;38.02)
Vỏ trống lõm ($a=-4R$)	Không gân	0.086 (1;4)	0.095 (1;4)	0.101 (1;4)
	Trực giao	0.265 (1;4)	0.275 (1;4)	0.281 (1;4)
	Xoắn ốc	0.402 (1;4;14;70.47)	0.412 (1;4;14;70.47)	0.418 (1;4;14;70.47)

^a(m;n); ^b(m;n;n_i;θ)

Bảng 3 trình bày tải tới hạn tĩnh và động của vỏ trống lồi FG-GPLRC có/không có gân ứng với các phân bố graphene platelet khác nhau (X/X, UD/UD, V/Λ, O/O, Λ/V) và hai vận tốc gia tải. Kết quả cho thấy tải tới hạn động luôn lớn hơn tải tới hạn tĩnh trong mọi cấu hình và tăng khi vận tốc gia

tải tăng, phản ánh hiệu ứng quán tính làm trễ quá trình mất ổn định khi tải được gia tải nhanh. Đồng thời, ảnh hưởng của gân tăng cứng là rất rõ rệt: so với trường hợp không gân, gân trực giao làm tăng đáng kể tải tới hạn và gân xoắn ốc cho hiệu quả cao nhất trong tất cả các trường hợp phân bố vật

liệu. Bên cạnh đó, kiểu phân bố GPL theo bề dày cũng chi phối mạnh khả năng ổn định: với không gân, cấu hình X/X cho tải tới hạn lớn nhất còn O/O nhỏ nhất, cho thấy phân bố vật liệu bất lợi có thể làm suy giảm độ cứng hiệu dụng của vỏ; ngược lại,

khi có gân (đặc biệt gân xoắn ốc), cấu hình V/Λ cho tải tới hạn cao nhất. Ngoài ra, các mode tới hạn cho thấy khi thay đổi loại gân, mode mất ổn định tới hạn có thể dịch chuyển từ các mode mất ổn định của vỏ không gân sang các mode khác.

Bảng 3. Tải tới hạn động và tĩnh nén dọc trục của vỏ trống lồi FG-GPLRC có gân (GPa, $a=4R$, $W_{GPL}=0.5\%$, $h=2\text{mm}$, $R=80h$, $L=1.5R$, $b_r=b_s=b_l=h$, $h_r=h_s=h_l=1.5h$, $d_r=d_s=d_l=24\text{mm}$)

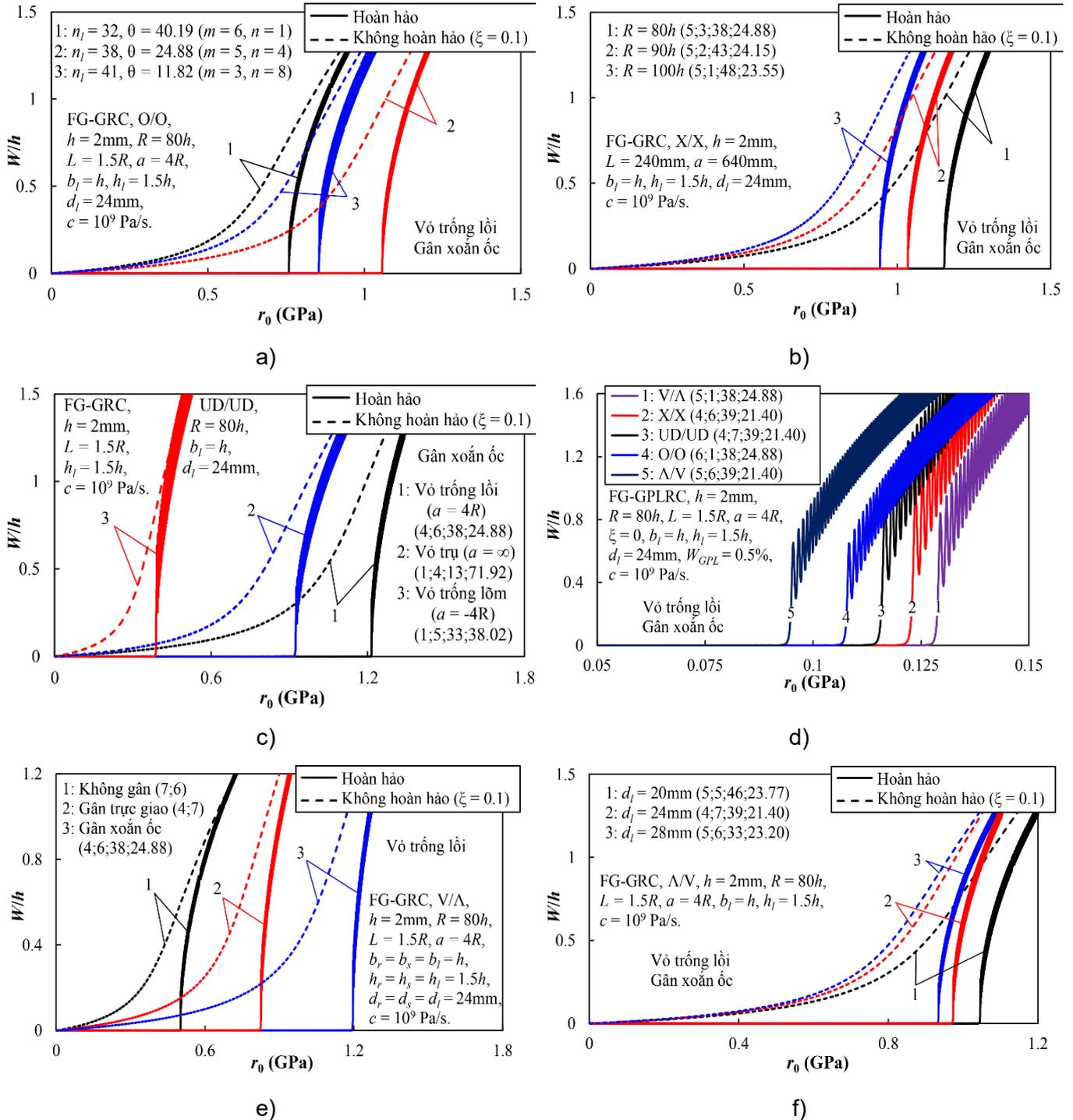
	Loại gân	Tĩnh	Động	
			$c = 10^9(\text{Pa/s})$	$c = 2 \times 10^9(\text{Pa/s})$
	Không gân	0.055 (8;1)	0.057 (8;1)	0.059 (8;1)
UD/UD	Trực giao	0.086 (4;7)	0.090 (4;7)	0.092 (4;7)
	Xoắn ốc	0.113 (4;7;39;21.40)	0.116 (4;7;39;21.40)	0.118 (4;7;39;21.40)
	Không gân	0.063 (7;1)	0.065 (7;1)	0.066 (7;1)
X/X	Trực giao	0.094 (4;7)	0.097 (4;7)	0.100 (4;7)
	Xoắn ốc	0.120 (4;6;39;21.40)	0.123 (4;6;39;21.40)	0.125 (4;6;39;21.40)
	Không gân	0.045 (9;1)	0.047 (9;1)	0.048 (9;1)
O/O	Trực giao	0.078 (4;7)	0.082 (4;7)	0.084 (4;7)
	Xoắn ốc	0.105 (6;1;38;24.88)	0.108 (6;1;38;24.88)	0.109 (6;1;38;24.88)
	Không gân	0.051 (8;1)	0.053 (8;1)	0.054 (8;1)
V/Λ	Trực giao	0.091 (4;7)	0.094 (4;7)	0.098 (4;7)
	Xoắn ốc	0.126 (5;1;38;24.88)	0.129 (5;1;38;24.88)	0.131 (5;1;38;24.88)
	Không gân	0.051 (8;1)	0.053 (8;1)	0.054 (8;1)
Λ/V	Trực giao	0.075 (5;7)	0.077 (5;7)	0.080 (5;7)
	Xoắn ốc	0.095 (5;6;39;21.40)	0.098 (5;6;39;21.40)	0.101 (5;6;39;21.40)

Hình 2 cho thấy đáp ứng ổn định động lực của các kết cấu vỏ dưới tải nén dọc trục tăng tuyến tính theo thời gian. Có thể thấy ở miền tải nhỏ, độ võng tăng từ từ và đường cong tương đối trơn; khi tải tiến gần ngưỡng tới hạn, độ võng tăng rất nhanh và xuất hiện vùng mất ổn định động lực theo điều kiện Budiansky–Roth. So sánh hai trường hợp vỏ hoàn hảo và không hoàn hảo cho thấy độ võng không hoàn hảo làm đáp ứng trở nên trơn hơn và không xuất hiện vùng mất ổn định rõ rệt. Xu hướng này nhất quán trong các Hình 2(a) đến 2(f). Đối với

vỏ FG-GRC tăng cứng bằng gân xoắn ốc, các Hình 2(a) đến 2(c) cho thấy đáp ứng và vùng mất ổn định phụ thuộc mạnh vào số lượng (góc xiên) của gân xoắn ốc, bán kính chính của vỏ và loại vỏ (vỏ trống lồi, lõm và vỏ trụ). Số lượng gân tăng làm tăng tải tới hạn, tới một giá trị lớn nhất và sau đó giảm khi số lượng gân tiếp tục tăng (Hình 2(a)). Trong khi đó bán kính vỏ càng mỏng thì tải tới hạn càng giảm (Hình 2(b)). Cuối cùng, vỏ trống lồi cho thấy khả năng chịu tải vượt trội so với vỏ trống lõm và vỏ trụ có khả năng chịu tải thấp nhất (Hình 2(c)).

Đối với vỏ trống FG-GPLRC, Hình 2(d) so sánh các quy luật phân bố (UD/UD, X/X, O/O, V/Λ, Λ/V) và cho thấy sự tách biệt rõ giữa các đường cong đáp ứng, phân bố V/Λ có vùng mất ổn định xuất hiện ở giá trị tải trọng lớn hơn, trong khi O/O hoặc Λ/V mất ổn định ở giá trị tải trọng nhỏ hơn. Hình 2(e) thể hiện rất rõ vai trò của kiểu gân: không gân mất ổn

định sớm nhất, gân trực giao cải thiện đáng kể, và gân xoắn ốc mất ổn định tại giá trị tải trọng lớn nhất. Cuối cùng, Hình 2(f) thể hiện ảnh hưởng của khoảng cách gân xoắn ốc tới đáp ứng động lực của vỏ, khoảng cách gân tăng làm vùng mất ổn định xuất hiện sớm hơn rõ rệt, tương ứng với khả năng chịu tải kém hơn đáng kể.



Hình 2. Ứng xử ổn định động lực của vỏ trống và vỏ trụ FG-GPLRC và FG-GRC có gân tăng cứng

6. Kết luận

Trong phạm vi bài báo này, một mô hình san ảnh hưởng gân đã được mở rộng cho hệ thống gân tăng cứng trực giao và xoắn ốc. Bằng cách áp dụng lý thuyết vỏ Donnell, sử dụng hàm ứng suất và tiếp cận năng lượng, đã thu được phương trình vi phân chuyển động của vỏ. Bằng thuật toán Runge-Kutta, các khảo sát số được thực hiện và điều kiện Budiansky-Roth và phân tích các ảnh hưởng đáng kể của các loại gân tăng cứng, các tham số hình học và tham số vật liệu lên các ứng xử phi tuyến ổn định động lực của vỏ trống và vỏ trụ FG-GRC và FG-GLRC tăng cứng bởi gân.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2023.45.

Tài liệu tham khảo

- [1] Z. Wang, Q. Han, D.H. Nash, P. Liu, D. Hu. (2018). Investigation of imperfect effect on thermal buckling of cylindrical shell with FGM coating. *European Journal of Mechanics - A/ Solids*, 221-230. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.01.004>
- [2] A.H. Sofiyev, D. Hui. (2019). On the vibration and stability of FGM cylindrical shells under external pressures with mixed boundary conditions by using FOSDT. *Thin-Walled Structures*, 134, 419-427. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.10.018>
- [3] Z. Cao and Y. Hu. (2026). Magneto-Thermoelastic Principal Parameter Resonance of a Functionally Graded Cylindrical Shell with Axial Tension. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 26(01), 2550256. <https://doi.org/10.1142/S0219455425502566>
- [4] D.H. Bich, D.V. Dung, V.H. Nam, N.T. Phuong. (2013). Nonlinear static and dynamic buckling analysis of imperfect eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under axial compression. *International Journal of Mechanical Sciences*, 74, 190-200. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.06.002>
- [5] V.H. Nam, N.T. Phuong, K.V. Minh, P.T. Hieu. (2018). Nonlinear thermo-mechanical buckling and post-buckling of multilayer FGM cylindrical shell reinforced by spiral stiffeners surrounded by elastic foundation subjected to torsional loads. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 72, 393-406. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.06.005>
- [6] R. Ansari, J. Torabi. (2019). Semi-analytical postbuckling analysis of polymer nanocomposite cylindrical shells reinforced with functionally graded graphene platelets, *Thin-Walled Structures*, 144, 106248. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106248>
- [7] Z. Li, Q. Wang, Q. Yang, B. Qin. (2026). Vibration Response Analysis of Multilayer Functionally Graded Graphene Platelet-Reinforced Composite Cylindrical Shell Under Moving Random Loads, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 26(4). <https://doi.org/10.1142/S0219455426500112>
- [8] S. W. Yang, Y. X. Hao, W. Zhang, L. Yang, L.T. Liu. (2021). Free vibration and buckling of eccentric rotating FG-GLRC cylindrical shell using first-order shear deformation theory, *Composite Structures*, 263, 113728. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113728>
- [9] L.K. Hoa, V.T. Hung, P.H. Quan, V.H. Nam. (2021). Nonlinear buckling and postbuckling of spiral stiffened FG-GLRC cylindrical shells subjected to torsional loads. *Journal of Science and Transport Technology*, 1(1), 24-33. <https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2021.en.1.1.24-33>
- [10] H.N. Vu, V.D. Cao, L.H. Kieu, Q.T. Kieu, T.D. Dang. (2025). Nonlinear stability analysis

- of FG-GPLRC toroidal shell segments with arbitrary meridian curvature stiffened by helix FG-GPLRC stiffeners surrounded by an elastic foundation subjected to radial load. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-21.
<https://doi.org/10.1080/15397734.2025.2594206>
- [11] H.S. Shen, Y. Xiang. (2018). Postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells subjected to external pressure in thermal environments. *Thin-Walled Structures*, 124, 151-160.
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.12.005>
- [12] H.S. Shen, Y. Xiang. (2018). Postbuckling behavior of functionally graded graphene reinforced composite laminated cylindrical shells under axial compression in thermal environments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 330, 64-82.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.10.022>
- [13] H.N. Vu, T.P. Nguyen, S.L. Ho, M.D. Vu, V.D. Cao. (2023). Nonlinear buckling analysis of stiffened FG-GRC laminated cylindrical shells subjected to axial compressive load in thermal environment. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 51(7), 3678–3694.
<https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1932522>
- [14] V.D. Cao, H.N. Vu, T.P. Nguyen. (2022). Nonlinear Electro-Thermo-Torsional Buckling Analysis of Stiffened Functionally Graded Graphene-Reinforced Composite Laminated Toroidal Shell Segments. *Journal of Engineering Mechanics*, 149(2).
<https://doi.org/10.1061/JENMDT.EMENG-6607>
- [15] V.H. Nam, C.V. Doan, P.T. Hieu, K.L. Huong, N.T. Phuong. A new analytical approach for nonlinear pressured buckling behavior of FG-GRMMC complexly curved toroidal shell segments with piezoelectric layers stiffened by spiral FG-GRMMC stiffeners. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 239(24).
<https://doi.org/10.1177/09544062251376103>