



Nonlinear Stability of Sandwich FG-GPLRC Shallow Spherical Caps and Circular Plates with Porous Cores Based on FSDT – A Stress Function Approach

Article info

Type of article:

Original research paper

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2025.vn.5.4.9-21>

*Corresponding author:

Email address:

nguyenthiphuong@tdtu.edu.vn

Received: 26/10/2025

Received in Revised Form:

15/11/2025

Accepted: 18/11/2025

Bui Tien Tu¹, Kieu Quang Thai², Pham Nhu Nam^{3,4}, Nguyen Thi Phuong^{5,6,*}

¹Faculty of Fundamental Science for Engineering, University of Transport Technology, Hanoi, Vietnam

²Graduate University of Science and Technology, Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam

³Institute of Mechanical Engineering, University of Transport Technology, Hanoi, Vietnam

⁴Faculty of Mathematics, Mechanics, and Informatics, VNU University of Science, Hanoi, Vietnam

⁵Mechanics of Advanced Materials and Structures, Institute for Advanced Study in Technology, Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Vietnam

⁶Faculty of Civil Engineering, Ton Duc Thang University, Ho Chi Minh City, Vietnam

Abstract: This paper presents a study on the nonlinear stability of shallow spherical caps and sandwich circular plates made from functionally graded graphene platelet-reinforced composite (FG-GPLRC) with porous cores. The structures are subjected to external pressure, uniform thermal loading, and are resting on a Winkler elastic foundation. The First-Order Shear Deformation Theory (FSDT), incorporating von Kármán-type geometric nonlinearity is employed to formulate the governing equations. A novel approach using stress functions is developed to model the structural behavior. Furthermore, the total potential energy expressions are derived, and the Ritz energy method is utilized to obtain the equilibrium equations. A comprehensive numerical investigation is conducted to analyze the effects of geometric and material parameters, porosity coefficients, and foundation stiffness, with detailed discussions provided.

Keywords: Shallow spherical cap, Circular plate, First-order shear deformation theory, Functionally graded graphene platelet-reinforced composite, Energy method.



Ổn định phi tuyến của Chòm cầu thoải và Tám tròn sandwich FG-GPLRC lõi rỗng theo FSDT – Tiếp cận hàm ứng suất

Thông tin bài viết

Dạng bài viết:

Bài báo nghiên cứu

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2025.vn.5.4.9-21>

*Tác giả liên hệ:

Địa chỉ Email:

nguyenthiphuong@tdtu.edu.vn

Ngày nộp bài: 26/10/2025

Ngày nộp bài sửa: 15/11/2025

Ngày chấp nhận: 18/11/2025

Bùi Tiến Tú¹, Kiều Quang Thái², Phạm Như Nam^{3,4}, Nguyễn Thị Phương^{5,6,*}

¹Khoa Cơ sở kỹ thuật, Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, Hà Nội, Việt Nam

²Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Hà Nội, Việt Nam

³Viện Cơ khí Động lực, Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, Hà Nội, Việt Nam

⁴Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Việt Nam

⁵Phòng nghiên cứu Cơ học Vật liệu và Kết cấu tiên tiến, Viện Công nghệ tiên tiến, Trường Đại học Tôn Đức Thắng, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

⁶Khoa Kỹ thuật công trình, Trường Đại học Tôn Đức Thắng, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tóm tắt: Ổn định phi tuyến của chòm cầu thoải và tám tròn sandwich làm bằng composite gia cường graphene platelet cơ tính biến thiên (FG-GPLRC) lõi rỗng được trình bày trong bài báo này. Các kết cấu được xem xét chịu tải trọng áp lực ngoài, tải nhiệt đều và nằm trên nền đàn hồi Winkler. Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT) với tính phi tuyến hình học của von Karman được sử dụng để thiết lập các phương trình chủ đạo của vỏ. Bài báo trình bày một phương pháp xác định hàm ứng suất của kết cấu, ngoài ra, biểu thức thế năng toàn phần được thiết lập và phương pháp năng lượng Ritz được áp dụng để đạt được hệ phương trình cân bằng của hệ. Ảnh hưởng của các thông số hình học, vật liệu, hệ số rỗng, nền đàn hồi được khảo sát số và thảo luận một cách chi tiết.

Từ khóa: Chòm cầu thoải, Tám tròn, Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất, Composite gia cường graphene platelet cơ tính biến thiên, Phương pháp năng lượng.

1. Mở đầu

Tám tròn là một kết cấu phổ biến trong các thiết kế kỹ thuật, khác với tám hình chữ nhật, tám tròn làm giảm sự tập trung ứng suất tại các góc, từ đó nâng cao hiệu quả chịu tải dưới các điều kiện tải trọng. Vỏ cầu thoải là một kết cấu có độ cong nhẹ, mang lại khả năng chịu tải cao hơn đáng kể so với tám tròn.

Trong vài thập kỷ qua, các nghiên cứu về ứng xử cơ học của tám tròn và chòm cầu thoải đẳng hướng đã thu hút sự quan tâm đáng kể trên thế giới. Nhiều tiến bộ quan trọng đã được ghi nhận trong các bài toán ứng xử cơ học phi tuyến, và tương tác chất lỏng - kết cấu. Najafipour và Shariyat [1] đã phát triển lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT) tinh chỉnh để khảo sát bài toán

biến dạng lớn trong các tấm đàn hồi chịu tải áp suất đột ngột và điều hòa, bằng phương pháp rời rạc hóa không gian vi phân bậc bốn. Các bài toán về ổn định và mất ổn định của chòm cầu thoải đã được giới thiệu cho các vỏ dày dạng vòng ghép nhiều lớp [2], chòm cầu thoải dạng lưới [3], và chòm cầu thoải dưới dòng chảy độ cong trung bình bảo toàn thể tích [4].

Các nghiên cứu về tấm tròn và chòm cầu thoải làm bằng vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) tập trung vào ứng xử ổn định động cơ-nhiệt và dao động. Ứng xử sau mất ổn định do nhiệt của tấm tròn FGM đã được xem xét nhấn mạnh vào hiện tượng snap-through, có tính đến đặc tính phụ thuộc nhiệt độ của vật liệu [5]. Barzegar và Fadaee [6] đã phân tích dao động nhiệt của chòm cầu thoải FGM, đề xuất một phương pháp giải tích nhằm đơn giản hóa tương tác phức tạp giữa nhiệt độ và ứng xử kết cấu. Các bài toán dao động và mất ổn định phi tuyến [7, 8] của chòm cầu thoải FGM đã được khảo sát bằng FSDT và lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (HSDT), áp dụng lần lượt phương pháp Galerkin và phương pháp năng lượng Ritz. Các lớp vật liệu áp điện cũng được thiết kế nhằm kiểm soát chủ động dao động nhiệt của tấm tròn FGM có xét đến đặc tính phụ thuộc nhiệt độ [9]. Dựa trên lý thuyết đàn hồi ba chiều, Kalleli và các cộng sự [10] đã cải tiến FSDT để nghiên cứu ứng xử ổn định chòm cầu thoải FGM rỗng chịu tải cơ-nhiệt.

Các nghiên cứu về tấm tròn và chòm cầu thoải nanocomposite cơ tính biến thiên tập trung vào dao động, mất ổn định động và sau mất ổn định, đặc biệt dưới tác động của tải nhiệt và cơ. Sankar và các cộng sự [11] đã khảo sát hiện tượng snap-through động của chòm cầu thoải sandwich gia cường bằng ống nano carbon (CNT), làm nổi bật hiệu suất kết cấu vượt trội so với trường hợp không được gia cường. Các bài toán dao động của tấm tròn làm bằng composite gia cường graphene platelet cơ tính biến thiên (FG-GPLRC) sử dụng FSDT [12] và HSDT [13], có xét đến nền phi tuyến [12] và lõi rỗng [13]. Bằng cách sử dụng HSDT và phương pháp năng lượng Ritz, bài toán sau mất ổn định cơ-nhiệt phi tuyến của chòm cầu FG-

GPLRC cũng đã được nghiên cứu [14, 15].

Mặc dù đã có một số nghiên cứu về kết cấu chòm cầu FG-GPLRC, tuy vậy các nghiên cứu về kết cấu FG-GPLRC sandwich lõi rỗng vẫn chưa được quan tâm thỏa đáng. Kết hợp đặc trưng hình học đặc biệt của chòm cầu và các ưu điểm nổi trội của kết cấu sandwich có tiềm năng lớn trong các ứng dụng của các kết cấu công trình và cơ khí chế tạo. Bài báo này nghiên cứu ổn định cơ-nhiệt phi tuyến của tấm tròn và chòm cầu thoải FG-GPLRC sandwich lõi rỗng. FSDT và tính phi tuyến hình học của von Karman được sử dụng để thiết lập các phương trình chủ đạo. Hệ phương trình cân bằng được giải bằng phương pháp Ritz. Nghiên cứu thực hiện phân tích số để khảo sát ảnh hưởng của các thông số hình học, vật liệu, nền đàn hồi và lõi rỗng đến ổn định của kết cấu.

2. Vật liệu Sandwich FG-GPLRC

Vật liệu sandwich FG-GPLRC lõi rỗng được cấu tạo bởi lớp phủ trên và dưới bằng FG-GPLRC, có vật liệu nền là kim loại Đồng. Để đảm bảo tính liên tục của vật liệu, lớp lõi rỗng cũng bằng kim loại Đồng với tỷ phần thể tích rỗng biến thiên dọc theo chiều dày của lớp lõi. Độ dày lớp phủ trên và lớp phủ dưới bằng nhau là h_{fs} và độ dày lớp lõi rỗng là h_{pc} (Hình 1).

Đối với lớp lõi rỗng, tỷ phần thể tích rỗng $V_p(z)$ được xác định theo quy luật

$$V_p(z) = e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h_{pc}}\right), \quad -\frac{h_{pc}}{2} < z < \frac{h_{pc}}{2} \quad (1)$$

với e_0 là độ rỗng của lớp lõi ($0 \leq e_0 < 1$).

Mô đun đàn hồi $E_{pc}(z)$ và hệ số giãn nở nhiệt $\alpha_{pc}(z)$ xác định

$$\begin{aligned} [E(z), \alpha(z)] = \\ [E_m, \alpha_m] \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h_{pc}}\right) \right], \quad -\frac{h_{pc}}{2} < z < \frac{h_{pc}}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Mô đun đàn hồi của FG-GPLRC được xác định theo mô hình Halpin-Tsai mở rộng [16]

$$E(z) = \left[\frac{3 + 3\zeta_1\delta_1 V_{GPL}(z)}{8 - 8\delta_1 V_{GPL}(z)} + \frac{5 + 5\zeta_2\delta_2 V_{GPL}(z)}{8 - 8\delta_2 V_{GPL}(z)} \right] E_m, \quad (3)$$

trong đó

$$\delta_1 = \frac{(E_{GPL}/E_m) - 1}{(E_{GPL}/E_m) + \zeta_1}, \quad \delta_2 = \frac{(E_{GPL}/E_m) - 1}{(E_{GPL}/E_m) + \zeta_2},$$

$\zeta_1 = 2(a_{GPL}/t_{GPL})$, $\zeta_2 = 2(b_{GPL}/t_{GPL})$, với E_m và E_{GPL} lần lượt là các mô đun đàn hồi của kim loại Đồng và graphene platelet (GPL); a_{GPL} , b_{GPL} , t_{GPL} là các kích thước chiều dài, chiều rộng và chiều dày của GPL tương ứng; $V_{GPL}(z)$ là tỷ phần thể tích của GPL tại tọa độ z được xác định như sau

$$V_{GPL}(z) = \frac{W_{GPL}(z)}{W_{GPL}(z) + (\rho_{GPL}/\rho_m)[1 - W_{GPL}(z)]}, \quad (4)$$

trong đó ρ_m và ρ_{GPL} lần lượt là khối lượng riêng của kim loại Đồng và GPL.

Trong đó, tỷ phần khối lượng của GPL $W_{GPL}(z)$ được xác định tương ứng với 5 loại phân bố GPL của lớp phủ trên và 5 loại phân bố GPL của lớp phủ dưới $-\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{h_{pc}}{2}$ như sau

+) Lớp phủ trên

- Loại UD-GPLRC: $W_{GPL}(z) = W_{GPL}^*$ (5)

- Loại X-GPLRC:

$$W_{GPL}(z) = \left(\frac{8z + 4h}{h - h_{pc}} - 2 \right) W_{GPL}^* \quad (6)$$

- Loại O-GPLRC:

$$W_{GPL}(z) = \left(2 - \left| \frac{8z + 4h}{h - h_{pc}} - 2 \right| \right) W_{GPL}^* \quad (7)$$

- Loại V-GPLRC:

$$W_{GPL}(z) = \left(\frac{4z + 2h_c}{h_{pc} - h} \right) W_{GPL}^* \quad (8)$$

- Loại A-GPLRC:

$$W_{GPL}(z) = \left(\frac{4z + 2h}{h - h_{pc}} \right) W_{GPL}^* \quad (9)$$

+) Lớp phủ dưới $\frac{h_{pc}}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$

- Loại UD-GPLRC: $W_{GPL}(z) = W_{GPL}^*$ (10)

- Loại X-GPLRC:

$$W_{GPL}(z) = \left(\left| \frac{8z - 4h}{h - h_{pc}} + 2 \right| \right) W_{GPL}^* \quad (11)$$

- Loại O-GPLRC:

$$W_{GPL}(z) = \left(2 - \left| \frac{8z - 4h}{h - h_{pc}} + 2 \right| \right) W_{GPL}^* \quad (12)$$

- Loại V-GPLRC:

$$W_{GPL}(z) = \left(\frac{2h_{pc} - 4z}{h_{pc} - h} \right) W_{GPL}^* \quad (13)$$

- Loại A-GPLRC:

$$W_{GPL}(z) = \left(\frac{2h - 4z}{h - h_{pc}} \right) W_{GPL}^* \quad (14)$$

trong đó W_{GPL}^* là tổng tỷ phần khối lượng của GPL trong mỗi lớp phủ FG-GPLRC. Hệ số Poisson $\nu_{fs}(z)$ và hệ số giãn nở nhiệt $\alpha_{fs}(z)$ của các lớp phủ được xác định bởi

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \nu_m [1 - V_{GPL}(z)] + \nu_{GPL} V_{GPL}(z), \\ \alpha(z) &= \alpha_m [1 - V_{GPL}(z)] + \alpha_{GPL} V_{GPL}(z). \end{aligned} \quad (15)$$

Với các loại phân bố GPL của hai lớp phủ, năm loại cấu trúc sandwich FG-GPLRC lõi rỗng thu được là: X-PC-X, O-PC-O, UD-PC-UD, V-PC-A, A-PC-V như thể hiện trên Hình 1.

3. Mô hình và các phương trình chủ đạo

Xét kết cấu chỏm cầu thoải và tằm tròn ngâm cố định xung quanh chu tuyến như Hình 1 với các thông số hình học như sau: chiều dày h , bán kính chính R và bán kính đáy a . Do mode biến dạng đối xứng trục là chiếm ưu thế với các kết cấu tằm tròn và chỏm cầu thoải, vì vậy giả thiết đối xứng trục được xem xét trong nghiên cứu này. Hệ tọa độ cực (φ, θ, z) được đặt ở mặt giữa kết cấu; trong đó

z là trục hướng tâm vuông góc với mặt giữa, θ là tọa độ theo hướng chu vi và φ là tọa độ theo hướng kinh tuyến. Kết cấu chỏm cầu thoải được giả thiết có độ thoải lớn nên các phép tính gần đúng $\cos \varphi \approx 1$ và $Rd\varphi \approx dr$ được áp dụng. Để đơn giản hóa quá trình tính toán, hệ tọa độ (r, θ, z) với biến $r = R \sin \varphi$ được sử dụng.

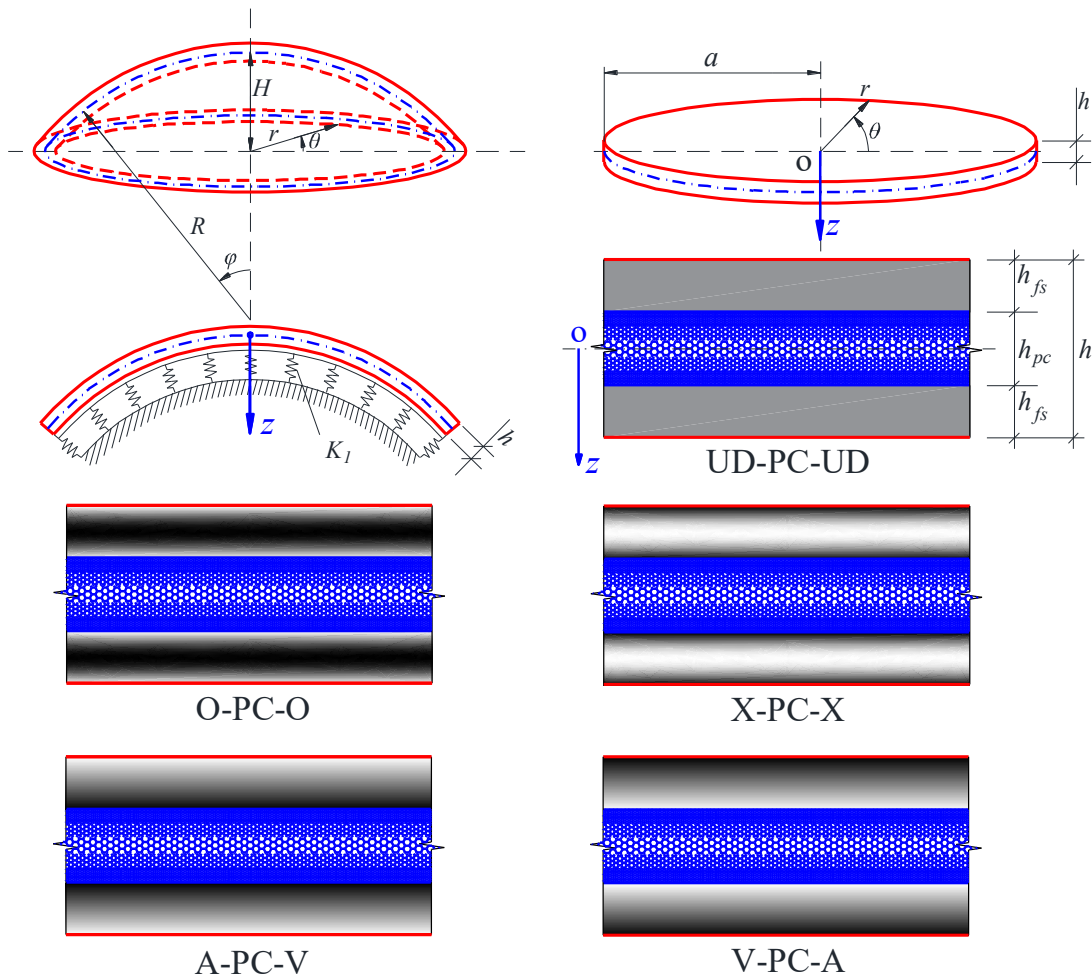
Kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn đặt trên nền đàn hồi Winkler với hệ số nền K_1 . Tải tác dụng lên kết cấu gồm tải áp lực ngoài q phân bố đều trên bề mặt và tải nhiệt ΔT tăng đều. Các phương trình chủ đạo được thiết lập với trường hợp kết cấu chỏm cầu thoải, các phương trình và quan hệ của

kết cấu tấm tròn thu được khi cho bán kính cong chính $R \rightarrow \infty$.

Xét một điểm bất kỳ có tọa độ z , gọi $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ lần lượt là các thành phần chuyển vị tại điểm này theo các hướng của tọa độ r, θ, z . Phương trình quan hệ giữa chuyển vị $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ với các thành phần chuyển vị tại mặt giữa tương ứng (u, v, w) được biểu diễn như sau

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, z) &= u(r) + z\psi(r), \bar{v}(r, z) = 0, \\ \bar{w}(r, z) &= w(r) + w^*(r), \end{aligned} \quad (16)$$

trong đó: $\psi(r)$ và $w^*(r)$ tương ứng là góc quay pháp tuyến của mặt giữa và hàm mô tả độ võng không hoàn hảo ban đầu của kết cấu.



Hình 1. Mô hình kết cấu chỏm cầu thoải và tấm tròn sandwich FG-GPLRC

Theo FSDT, phương trình quan hệ giữa các thành phần biến dạng tại điểm bất kỳ có tọa độ Z với các thành phần biến dạng tương ứng của điểm ở mặt giữa là

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 + z\chi_r, \quad (17)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + z\chi_\theta, \quad \varepsilon_{rz} = \psi + w_{,r},$$

trong đó: $\varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0$ lần lượt là các biến dạng theo

phương kinh tuyến và theo phương vĩ tuyến tại mặt giữa; χ_r, χ_θ lần lượt là các thành phần độ cong theo phương kinh tuyến và theo phương vĩ tuyến tại mặt giữa, được xác định như sau [7]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \chi_r \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,r} + w_{,r}^2/2 + w_{,r}w_{,r}^* - w/R \\ u/r - w/R \\ \psi_{,r} \\ \psi/r \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Áp dụng định luật Hooke cho kết cấu chỏm cầu thoải chịu tác dụng của tải áp lực ngoài phân bố đều kết hợp với tải nhiệt tăng đều như sau

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha(z)\Delta T \\ \alpha(z)\Delta T \end{Bmatrix}, \quad (19)$$

$$\sigma_{rz} = Q_{44}\varepsilon_{rz}.$$

trong đó ΔT là độ tăng nhiệt độ so với nhiệt độ phòng không có ứng suất nhiệt, và

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E(z)}{1 - [\nu(z)]^2}, \\ Q_{12} = Q_{21} &= \frac{E(z)\nu(z)}{1 - [\nu(z)]^2}, \\ Q_{44} &= \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]}. \end{aligned} \quad (20)$$

Giả thiết bỏ qua tương tác giữa lớp phủ và lõi rỗng, các nội lực gồm lực giãn, mô men và lực cắt được tính như sau

$$\begin{aligned} (N_r, M_r) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) \sigma_r dz, \\ (N_\theta, M_\theta) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) \sigma_\theta dz, \\ Q_r &= K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz. \end{aligned} \quad (21)$$

trong đó hệ số hiệu chỉnh trượt được chọn là $K_s = 5/6$.

Thế phương trình (19) vào phương trình (21), có xét đến phương trình (17) thu được kết quả dưới dạng như sau

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ M_r \\ M_\theta \\ Q_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} & 0 \\ B_{11} & B_{12} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_s H_{44} \end{bmatrix} \times \quad (22)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \chi_r \\ \chi_\theta \\ \psi + w_{,r} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Phi_{1r} \\ \Phi_{1\theta} \\ \Phi_{2r} \\ \Phi_{2\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T,$$

trong đó

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) Q_{ij} dz, \quad (23)$$

$$ij = 11, 12, 21, 22$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1r} &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z) dz, \\ \Phi_{2r} &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z) z dz, \\ \Phi_{1\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{21} + Q_{22}) \alpha(z) dz, \\ \Phi_{2\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{21} + Q_{22}) \alpha(z) z dz, \\ H_{44} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} dz. \end{aligned} \quad (24)$$

Từ phương trình (22) thực hiện biến đổi để thu được biểu thức của các thành phần biến dạng theo các thành phần lực giãn, kết quả thu được như sau

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^0 &= A_{11}^* N_r + B_{11}^* \chi_r \\ &\quad + B_{12}^* \chi_\theta + A_{12}^* N_\theta - \Delta T \Phi_{1r}^* \\ \varepsilon_\theta^0 &= A_{21}^* N_r + B_{21}^* \chi_r \\ &\quad + B_{22}^* \chi_\theta + A_{22}^* N_\theta - \Delta T \Phi_{1\theta}^* \end{aligned} \quad (25)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
A_{11}^* &= \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, A_{12}^* = \frac{-A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \\
A_{21}^* &= \frac{-A_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, A_{22}^* = \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \\
B_{11}^* &= \frac{A_{12}B_{21} - A_{22}B_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, B_{21}^* = \frac{A_{21}B_{11} - A_{11}B_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \\
B_{12}^* &= \frac{A_{12}B_{22} - A_{22}B_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, B_{22}^* = \frac{A_{21}B_{12} - A_{11}B_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \\
\Phi_{1r}^* &= \frac{A_{12}\Phi_{10} - A_{22}\Phi_{1r}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}, \Phi_{10}^* = \frac{A_{21}\Phi_{1r} - A_{11}\Phi_{10}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}
\end{aligned}$$

Biểu thức của mô men theo lực giãn của chòm cầu thoải và tấm tròn sandwich FG-GPLRC thu được như sau

$$\begin{aligned}
M_r &= C_{11}^* N_r + D_{11}^* \chi_r \\
&\quad + D_{12}^* \chi_\theta + C_{12}^* N_\theta - \Delta T \Phi_{2r}^* \\
M_\theta &= C_{21}^* N_r + D_{21}^* \chi_r \\
&\quad + D_{22}^* \chi_\theta + C_{22}^* N_\theta - \Delta T \Phi_{2\theta}^*
\end{aligned} \quad (26)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
C_{11}^* &= B_{11}A_{11}^* + B_{12}A_{21}^*, \\
C_{12}^* &= B_{11}A_{12}^* + B_{12}A_{22}^*, \\
D_{11}^* &= B_{11}B_{11}^* + B_{12}B_{21}^* + D_{11}, \\
D_{12}^* &= B_{11}B_{12}^* + B_{12}B_{22}^* + D_{12}, \\
C_{21}^* &= B_{21}A_{11}^* + B_{22}A_{21}^*, \\
C_{22}^* &= B_{21}A_{12}^* + B_{22}A_{22}^*, \\
D_{21}^* &= B_{21}B_{11}^* + B_{22}B_{21}^* + D_{21}, \\
D_{22}^* &= B_{21}B_{12}^* + B_{22}B_{22}^* + D_{22}, \\
\Phi_{2r}^* &= B_{11}\Phi_{1r}^* + B_{12}\Phi_{10}^* + \Phi_{2r}, \\
\Phi_{2\theta}^* &= B_{21}\Phi_{1r}^* + B_{22}\Phi_{10}^* + \Phi_{2\theta}.
\end{aligned}$$

Phương trình tương thích biến dạng của kết cấu chòm cầu thoải FG-GPLRC lõi rỗng có xét đến độ võng không hoàn hảo nhận được như sau

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \varepsilon_{r,r} - \frac{2}{r} \varepsilon_{\theta,r} - \varepsilon_{\theta,rr} &= \frac{w_{,rr}}{R} \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{w_{,r}}{R} + w_{,r} w_{,rr} + w_{,r} w_{,rr}^* + w_{,rr} w_{,r}^* \right)
\end{aligned} \quad (27)$$

Hàm ứng suất $f(r)$ được xác định thỏa mãn điều kiện

$$N_r = f_{,r}/r, \quad N_\theta = f_{,rr} \quad (28)$$

Phương trình tương thích biến dạng (27)

được viết lại theo hai ẩn hàm f và w , như sau

$$\begin{aligned}
&-A_{22}^* f_{,rrr} + (A_{12}^* - A_{21}^* - 2A_{22}^*) \frac{f_{,rr}}{r} \\
&+ A_{11}^* \frac{f_{,rr}}{r^2} - A_{11}^* \frac{f_{,r}}{r^3} = \frac{w_{,rr}}{R} \\
&+ \frac{1}{r} \left(\frac{w_{,r}}{R} + w_{,r} w_{,rr} + w_{,r} w_{,rr}^* + w_{,rr} w_{,r}^* \right)
\end{aligned} \quad (29)$$

Thế biểu thức (28) vào (26) thu được biểu thức của mô men

$$\begin{aligned}
M_r &= f_{,r} C_{11}^*/r + D_{11}^* \chi_r \\
&\quad - \Delta T \Phi_{2r}^* + D_{12}^* \chi_\theta + C_{12}^* f_{,rr}, \\
M_\theta &= f_{,r} C_{21}^*/r + D_{21}^* \chi_r \\
&\quad - \Delta T \Phi_{2\theta}^* + D_{22}^* \chi_\theta + C_{22}^* f_{,rr}.
\end{aligned} \quad (30)$$

4. Điều kiện biên và xác định hàm ứng suất

Kết cấu chòm cầu thoải FG-GPLRC lõi rỗng biến dạng đối xứng trục có điều kiện biên ngàm cố định xung quanh chu tuyến được thể hiện bằng phương trình như sau:

$$\begin{aligned}
r=0: \quad &\psi=0, \quad f_{,r}=N_r=0, \\
r=a: \quad &w=0, \quad \psi=0, \quad N_r=Q_0,
\end{aligned} \quad (31)$$

trong đó Q_0 là phản lực nén tại cạnh biên.

Dựa vào điều kiện biên (31), dạng nghiệm cho độ võng và góc quay được chọn là [7]

$$w = \frac{W(a^2 - r^2)^2}{a^4}, \quad \psi = \Psi \frac{r(a^2 - r^2)}{a^3}, \quad (32)$$

trong đó: W và Ψ lần lượt là biên độ của độ võng w và góc quay ψ .

Hàm độ không hoàn hảo ban đầu w^* được giả định có dạng tương tự độ võng của kết cấu [7, 8]

$$w^* = W^* \frac{(a^2 - r^2)^2}{a^4}, \quad (33)$$

trong đó W^* là biên độ của hàm độ không hoàn hảo ban đầu w^* .

Thế w và w^* trong phương trình (32) và (33)

vào phương trình tương thích biến dạng (29) ta được

$$\begin{aligned} & -A_{22}^* f_{,rrrr} + \left(A_{12}^* - A_{21}^* - 2A_{22}^* \right) \frac{f_{,rrr}}{r} \\ & + A_{11}^* \frac{f_{,rr}}{r^2} - A_{11}^* \frac{f_{,r}}{r^3} = \frac{48W^2 + 96WW^*}{a^8} r^4 \\ & - \left(\frac{64W^2 + 128WW^*}{a^6} - \frac{16W}{a^4 R} \right) r^2 \\ & + \left(\frac{16W^2 + 32WW^*}{a^4} - \frac{8W}{a^2 R} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Dựa vào mối tương quan toán học giữa vế trái và vế phải của phương trình (34), hàm ứng suất được xác định như sau

$$f_{,r} = Y_1 r^7 + Y_2 r^5 + Y_3 r^3 + Y_4 r^2 + Y_5 r + C \quad (35)$$

trong đó

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_{11}W^2 + Y_{12}WW^*, \\ Y_2 &= Y_{21}W^2 + Y_{22}WW^* + Y_{23}W, \\ Y_3 &= Y_{31}W^2 + Y_{32}WW^* + Y_{33}W, \quad Y_4 = 0, \end{aligned}$$

Hằng số C và Y_5 được xác định dựa vào biểu thức điều kiện biên (31), dẫn tới

$$\begin{aligned} Y_5 &= Y_{51}W^2 + Y_{52}W + Y_{53}WW^* + Q_0, \\ C &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

trong đó Q_0 được xác định bằng điều kiện chuyển vị của cạnh kết cấu trong mặt phẳng đáy theo hướng vuông góc $\Delta = 0$ theo nghĩa trung bình:

$$\Delta = -\frac{1}{2\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a u_{,r} r dr d\theta = 0. \quad (37)$$

Phương trình (37) được giải bằng cách kết hợp phương trình (18), (25), (28), nhận được

$$\begin{aligned} Q_0 &= \\ & \frac{-1}{12U_{44}} \left[\left(4U_{23}a^4 + 6U_{33}a^2 + 12U_{43} \right) W \right. \\ & \left(3a^6 U_{12} + 4U_{22}a^4 + 6a^2 U_{32} + 12U_{42} \right) WW^* \\ & + 6 \left(U_{34}a^2 + 2U_{46} \right) \Psi - 12U_{45}\Delta + \\ & \left. \left(3U_{11}a^6 + 4U_{21}a^4 + 6U_{31}a^2 + 12U_{41} \right) W^2 \right] \end{aligned} \quad (38)$$

5. Phương pháp năng lượng Ritz

Thế năng biến dạng nhiệt đàn hồi của kết cấu chỏm cầu thoải được tính bằng [8]

$$U_{int} = \pi \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^a \left[\sigma_r (\varepsilon_r - \alpha \Delta T) + \sigma_\theta (\varepsilon_\theta - \alpha \Delta T) + \sigma_{rz} \varepsilon_{rz} \right] r dr dz, \quad (39)$$

Công do ngoại lực thực hiện có xét đến sự tương tác với nền đàn hồi được biểu diễn [8]

$$U_{ext} = 2\pi \int_0^a qwrdr - \pi \int_0^a K_1 w^2 r dr, \quad (40)$$

Biểu thức năng lượng toàn phần thu được

$$U_{Total} = U_{int} - U_{ext} \quad (41)$$

Phương trình năng lượng toàn phần (41) được viết lại theo hai ẩn là độ võng và góc xoay rồi áp dụng phương pháp Ritz như sau

$$\frac{\partial U_{Total}}{\partial \Psi} = 0 \quad \text{và} \quad \frac{\partial U_{Total}}{\partial W} = 0 \quad (42)$$

Liên hệ giữa tải áp lực ngoài q , tải nhiệt ΔT và biên độ độ võng W nhận được từ phương trình (42) như sau

$$\begin{aligned} & C_1 W^3 + (C_2 W^* + C_3) W^2 + \left[C_4 (W^*)^2 \right. \\ & \left. + C_5 W^* + C_6 \Delta T + C_7 - N_1 K_1 \right] W \\ & + C_8 \Delta T W^* + C_9 \Delta T - N_2 q = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Phương trình (43) được sử dụng để phân tích ứng xử ổn định cơ nhiệt phi tuyến của kết cấu chỏm cầu thoải và kết cấu tám tròn FG-GPLRC lõi rỗng. Các biểu thức quan hệ tải trọng – độ võng sau mất ổn định cơ – nhiệt nhận được dưới dạng

$$\begin{aligned} q &= \left[C_1 W^3 + (C_2 W^* + C_3) W^2 + C_8 \Delta T W^* \right. \\ & \left. + C_9 \Delta T + \left(C_4 (W^*)^2 + C_5 W^* + C_6 \Delta T \right. \right. \\ & \left. \left. + C_7 - K_1 N_1 \right) W \right] / N_2 \\ \Delta T &= -\frac{1}{C_6 W + C_8 W^* + C_9} \left[C_1 W^3 \right. \\ & \left. + (C_2 W^* + C_3) W^2 - N_2 q \right] \end{aligned} \quad (44)$$

$$+\left[C_4\left(W^*\right)^2+C_5 W^*+C_7-K_1 N_1\right] W\right] \quad (45)$$

Đối với tấm tròn hoàn hảo, tải nhiệt tới hạn theo tiêu chuẩn ổn định rẽ nhánh được xác định khi $W \rightarrow 0$ trong phương trình (45), nhận được

$$\Delta T_{cr} = -(C_7 - K_1 N_1) / C_6. \quad (46)$$

6. Kết quả số và thảo luận

Bảng 1 so sánh tải tới hạn nhiệt của tấm tròn sandwich FG-GPLRC hoàn hảo với các độ rỗng khác nhau với Lý và cộng sự [15] theo HSDT với tiếp cận theo chuyển vị. Kết quả đã xác nhận rõ ràng độ tin cậy của phương pháp của bài báo.

Trong nghiên cứu các thông số của vật liệu thành phần gồm GPL và kim loại Đồng được lấy theo nghiên cứu của Wang và các cộng sự [16].

Bảng 2 khảo sát tải tới hạn nhiệt của tấm tròn hoàn hảo sandwich FG-GPLRC với các độ rỗng lõi

khác nhau. Ngoài ra, Bảng 2 cũng khảo sát ảnh hưởng của tỷ phần khối lượng GPL và quy luật phân bố GPL tới tải tới hạn nhiệt của tấm. Rõ ràng rằng tải tới hạn nhiệt tăng khi độ rỗng lõi tăng trong tất cả các trường hợp khảo sát. Tỷ phần khối lượng GPL cũng ảnh hưởng mạnh tới tải tới hạn nhiệt, tải tới hạn nhiệt tăng mạnh khi tỷ phần khối lượng GPL tăng. Trong khi đó quy luật phân bố GPL cũng ảnh hưởng đáng kể tới tải tới hạn nhiệt của tấm, quy luật phân bố V-PC-A thể hiện ưu điểm vượt trội so với các quy luật phân bố khác, ngược lại quy luật phân bố A-PC-V có tải tới hạn nhiệt thấp nhất trong các quy luật được xem xét.

Bảng 3 khảo sát tải tới hạn nhiệt của tấm tròn hoàn hảo sandwich FG-GPLRC với các bề dày lõi khác nhau. Khi bề dày tổng của tấm không đổi, bề dày lõi tăng làm tăng mạnh tải tới hạn nhiệt của tấm, trường hợp tăng mạnh nhất có thể quan sát thấy trong trường hợp quy luật phân bố A-PC-V.

Bảng 1. So sánh tải tới hạn nhiệt ΔT_{cr} (K) của tấm tròn sandwich FG-GPLRC hoàn hảo với các kết quả

trước đây [15] ($h = 0.03\text{m}$, $a = 20h$, $W_{GPL}^* = 3\%$, $q = 0\text{MPa}$, $e_0 = 0.3$, $W^* = 0$)

	UD-PC-UD	X-PC-X	O-PC-O	V-PC-A
Bài báo	220.53	226.98	218.22	255.12
Lý và các cộng sự [15]	219.91	225.96	217.79	254.22
Sai số (%)	0.28	0.45	0.20	0.35

Bảng 2. Tải tới hạn nhiệt ΔT_{cr} (K) của tấm tròn hoàn hảo sandwich FG-GPLRC với các độ rỗng lõi khác

nhau ($a = 40h$, $R = \infty$, $W^* = 0$, $h_{pc} = h_{fs} = h/3$, $h = 0.03\text{m}$, $q = 0\text{MPa}$, $K_1 = 10\text{MN/m}^3$)

e_0	W_{GPL}^* (%)	X-PC-X	O-PC-O	UD-PC-UD	A-PC-V	V-PC-A
0.1	1	48.59	47.77	47.99	44.89	51.45
	4	54.57	52.89	52.95	46.93	60.35
	7	60.31	58.32	58.52	51.20	67.12
0.4	1	52.89	52.00	52.19	48.85	56.01
	4	58.13	56.34	56.22	49.98	64.30
	7	63.88	61.77	61.75	54.23	71.11
0.7	1	56.40	55.45	55.61	52.09	59.73
	4	60.91	59.03	58.77	52.36	67.38
	7	66.65	64.45	64.23	56.56	74.19

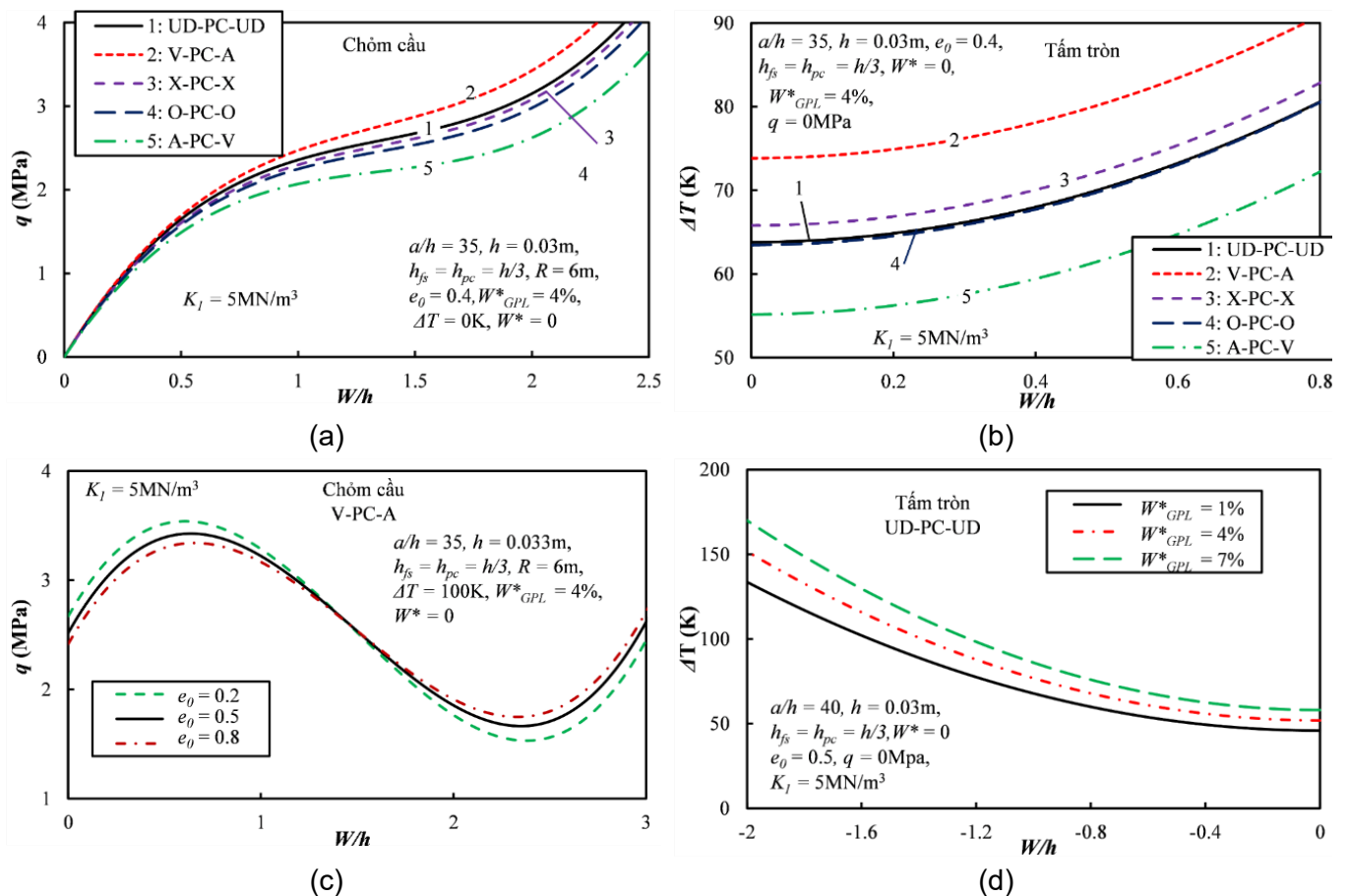
Hình 2 khảo sát ảnh hưởng của các thông số vật liệu tới ứng xử sau mất ổn định cơ-nhiệt của tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FG-GPLRC. Hình 2a và 2b trình bày ảnh hưởng của quy luật phân bố GPL tới đường cong sau mất ổn định của chỏm cầu thoải và tấm tròn tương ứng. Tương tự trong trường hợp tải tới hạn nhiệt, quy luật phân bố GPL V-PC-A thể hiện khả năng chịu tải vượt trội so với các quy luật còn lại. Hiện tượng mất ổn định rõ

nhánh cũng chỉ quan sát được trong trường hợp tấm tròn hoàn hảo chịu tải nhiệt. Ảnh hưởng của độ rỗng lõi tới ứng xử sau mất ổn định cơ của chỏm cầu thoải có thể quan sát được trong Hình 2c. Hiện tượng mất ổn định cực trị có thể quan sát được, ngoài ra, cường độ snap-through giảm khi độ rỗng lõi tăng. Khả năng chịu tải nhiệt sau mất ổn định của tấm tròn tăng đáng kể khi tỷ phần khối lượng GPL tăng như quan sát trong Hình 2b.

Bảng 3. Tải tới hạn nhiệt ΔT_{cr} (K) của tấm tròn hoàn hảo sandwich FG-GPLRC với các bề dày lõi khác

nhau ($a = 35h$, $h = 0.04\text{m}$, $h_{fs} = (h - h_{pc})/2$, $R = \infty$, $W^* = 0$, $q = 0\text{MPa}$, $K_I = 5\text{MN/m}^3$, $W_{GPL}^* = 4\%$, $e_0 = 0.4$)

h_{pc} (m)	V-PC-A	X-PC-X	UD-PC-UD	O-PC-O	A-PC-V
0.01	72.11	63.54	61.07	60.46	51.57
0.02	80.98	74.63	73.32	73.46	66.98
0.03	85.52	82.79	82.49	82.59	79.84



Hình 2. Ảnh hưởng của các thông số vật liệu tới ứng xử sau mất ổn định cơ-nhiệt của tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FG-GPLRC

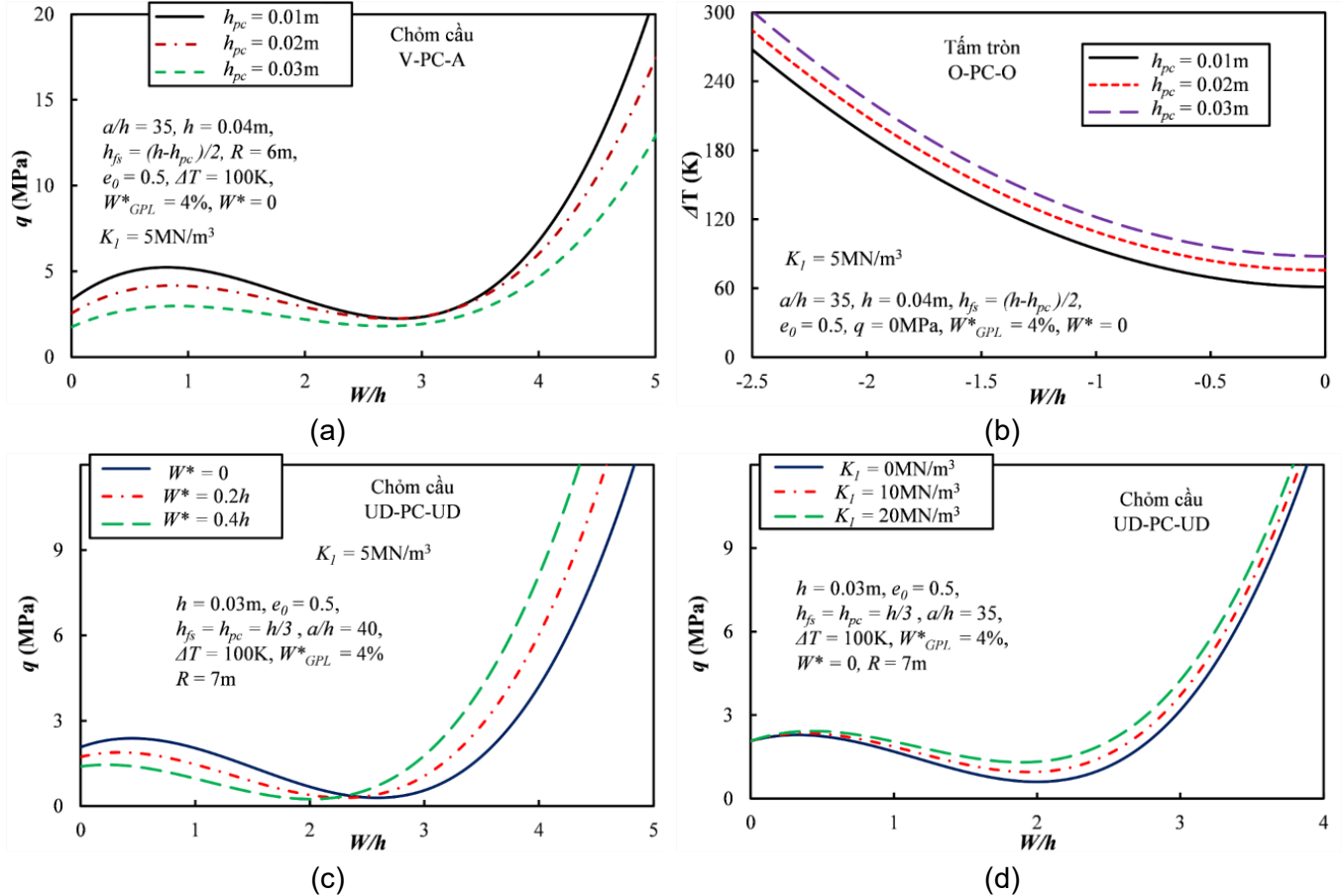
Hình 3 khảo sát ảnh hưởng của các thông số hình học và nền đàn hồi tới ứng xử sau mất ổn định

cơ-nhiệt của tấm tròn và chỏm cầu thoải sandwich FG-GPLRC. Hình 3a và 3b thể hiện đường cong

sau mất ổn định cơ và nhiệt tương ứng của chòm cầu thoải và tấm tròn với các bề dày lõi khác nhau. Hai quy luật trái ngược quan sát được, khi bề dày lõi tăng khả năng chịu tải cơ giảm, ngược lại khả năng chịu tải nhiệt tăng. Thêm vào đó, khi độ không

hoàn hảo tăng cường độ snap-through giảm rõ rệt (Hình 3c). Hệ số nền tăng làm tăng phản ứng nền dẫn tới khả năng chịu tải sau mất ổn định tăng đáng kể (Hình 3d).

7. Kết luận



Hình 3. Ảnh hưởng của các thông số hình học và nền đàn hồi tới ứng xử sau mất ổn định cơ-nhiệt của tấm tròn và chòm cầu thoải sandwich FG-GPLRC

Bài báo nghiên cứu ổn định cơ-nhiệt phi tuyến của tấm tròn và chòm cầu thoải sandwich FG-GPLRC có lõi rỗng, sử dụng FSDT và phi tuyến hình học von Karman. Phương trình cân bằng được giải bằng phương pháp Ritz, kết hợp phân tích số để đánh giá ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu, nền đàn hồi và lõi rỗng đến ứng xử ổn định của kết cấu. Các kết quả số cho thấy ảnh hưởng rõ rệt của độ rỗng và bề dày lõi rỗng tới tải tới hạn nhiệt và ứng xử sau mất ổn định cơ-nhiệt của tấm tròn và vỏ cầu thoải. Giả thiết biến dạng đối xứng trục và điều kiện biên ngàm đã giới hạn phạm vi ứng dụng của nghiên cứu cho chòm cầu có độ cong lớn, điều này có thể tạo động lực để thực hiện các nghiên cứu tiếp theo.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này thuộc đề tài Khoa học và Công nghệ, Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, mã số: DT2526-06.

Tài liệu tham khảo

- [1] M. Najafipour, M. Shariyat. (2023). A refined first-order shear deformation theory for large dynamic and static deflection investigations of abruptly/harmonically pressurized/blasted incompressible circular hyperelastic plates. *Ocean Engineering*, 289, Part 1, 116185. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.116185>
- [2] P.C. Dumir, G.P. Dube, A. Mallick. (2005). Axisymmetric buckling of laminated thick

- annular spherical cap. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10(2), 191-204. [https://doi.org/10.1016/S1007-5704\(03\)00124-2](https://doi.org/10.1016/S1007-5704(03)00124-2)
- [3] S. Malek, T. Wierzbicki, J. Ochsendorf. (2014). Buckling of spherical cap gridshells: A numerical and analytical study revisiting the concept of the equivalent continuum. *Engineering Structures*, 75, 288-298. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.05.049>
- [4] H. Abels, H. Garcke, L. Müller. (2015). Stability of spherical caps under the volume-preserving mean curvature flow with line tension. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 117, 8-37. <https://doi.org/10.1016/j.na.2014.11.020>
- [5] Y. Kiani. (2017). Axisymmetric static and dynamics snap-through phenomena in a thermally postbuckled temperature-dependent FGM circular plate. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 89, 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.11.003>
- [6] A.R. Barzegar, M. Fadaee. (2018). Thermal vibration analysis of functionally graded shallow spherical caps by introducing a decoupling analytical approach. *Applied Mathematical Modelling*, 58, 473-486. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.02.018>
- [7] N.T. Phuong, V.H. Nam, D.T. Dong. (2020). Nonlinear vibration of functionally graded sandwich shallow spherical caps resting on elastic foundations by using first-order shear deformation theory in thermal environment. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 22, 1157-1183.
- [8] L.N. Ly, D.T.N. Thu, D.T. Dong, V.M. Duc, B.T. Tu, N.T. Phuong, V.H. Nam. (2023). A Novel Analytical Approach for Nonlinear Thermo-Mechanical Buckling of Higher-Order Shear Deformable Porous Circular Plates and Spherical Caps with FGM Face Sheets. *International Journal of Applied Mechanics*, 15(05), 2350035. <https://doi.org/10.1142/S1758825123500357>
- [9] M. Javani, M.R. Eslami, Y. Kiani. (2024). Active control of thermally induced vibrations of temperature-dependent FGM circular plate with piezoelectric sensor/actuator layers. *Aerospace Science and Technology*, 146, 108997. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2024.108997>
- [10] S. Kalleli, A. Hajlaoui, F. Dammak. (2024). Improved-FSDT-based solid-shell element for buckling analysis of plate, spherical cap, and cylindrical shell of FG porous materials. *Computers & Mathematics with Applications*, 157, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.12.021>
- [11] A. Sankar, S. El-Borgi, T. Ben Zineb, M. Ganapathi. (2016). Dynamic snap-through buckling of CNT reinforced composite sandwich spherical caps. *Composites Part B: Engineering*, 99, 472-482. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.06.027>
- [12] M. Javani, Y. Kiani, M.R. Eslami. (2021). Geometrically nonlinear free vibration of FG-GPLRC circular plate on the nonlinear elastic foundation. *Composite Structures*, 261, 113515. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113515>
- [13] C. Chu, M.S.H. Al-Furjan, R. Kolahchi, A. Farrokhi. (2023). A nonlinear Chebyshev-based collocation technique to frequency analysis of thermally pre/post-buckled third-order circular sandwich plates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 118, 107056. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.107056>
- [14] N.T. Phuong, D.T. Dong, B.T. Tu, V.M. Duc, L.N. Khuong, P.T. Hieu, V.H. Nam. (2024). Nonlinear thermo-mechanical axisymmetric stability of FG-GPLRC spherical shells and circular plates resting on nonlinear elastic medium. *Ships and Offshore Structures*, 19(6), 820-830.

- <https://doi.org/10.1080/17445302.2023.2214489>
- [15] L.N. Ly, B.T. Tu, D.T.N. Thu, D.T. Dong, V.M. Duc, N.T. Phuong. (2023). Nonlinear thermo-mechanical buckling and postbuckling of sandwich FG-GPLRC spherical caps and circular plates with porous core by using higher-order shear deformation theory. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 36(10), 4083-4105.
- [16] Y. Wang, R. Zeng, M. Safarpour. (2022). Vibration analysis of FG-GPLRC annular plate in a thermal environment. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50(1), 352–370.
<https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1719508>