Tạp chí điện tử
Khoa học và Công nghệ Giao thông
Trang website: https://jstt.vn/index.php/vn

Article info
Type of article:
Original research paper

DOI:
https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2024.vn.4.4.48-55

[*]**Corresponding author:**
Email address:
bantv@utt.edu.vn

Received: 6/7/2024
Revised: 7/12/2024
Accepted: 9/12/2024

Some new issues about the modified internal rate of return

To Van Ban*
University of Transport Technology, 54 Trieu Khuc, Ha Noi, Viet Nam

Abstract: The paper mentioned the relationship between the modified internal rate of return MIRR and the net present value NPV in the case of variable interest rates. The correlation between the modified internal rate of return and the internal rate of return IRR even in the case of multiple rates of return is discussed. The conditions for the MIRR to be sandwiched between the IRR and the effective interest rate are also shown. The examples illustrate the broad applicability of the findings and show that, when these conditions are not guaranteed, such as with non-conventional cash flows, the MIRR may not be sandwiched between these two values.

Keywords: Rate of return, NPV, IRR, MIRR, non-conventional cash flow.

Tạp chí điện tử
Khoa học và Công nghệ Giao thông
Trang website: https://jstt.vn/index.php/vn

Thông tin bài viết
Dạng bài viết:
Bài báo nghiên cứu

DOI:
https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2024.vn.4.4.48-55

***Tác giả liên hệ:**
Địa chỉ Email:
bantv@utt.edu.vn

Ngày nộp bài: 6/7/2024
Ngày nộp bài sửa: 7/12/2024
Ngày chấp nhận: 9/12/2024

Một số vấn đề mới về tỷ suất hoàn vốn nội bộ hiệu chỉnh

Tô Văn Ban*
Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, 54 Triều Khúc, Hà Nội, Việt Nam

Tóm tắt: Bài viết đề cập mối quan hệ giữa tỷ suất hoàn vốn nội bộ hiệu chỉnh MIRR với giá trị hiện tại ròng NPV trong trường hợp lãi suất biến thiên. Mối tương quan giữa tỷ suất hoàn vốn nội bộ hiệu chỉnh với tỷ suất hoàn vốn nội bộ IRR kể cả trong trường hợp IRR bội được bàn luận. Những điều kiện để MIRR bị kẹp giữa IRR với lãi suất tác động cũng được chỉ ra. Các ví dụ minh họa phạm vi áp dụng rộng rãi của các phát hiện cũng như chỉ rõ rằng, khi những điều kiện này không đảm bảo, ví như với dòng tiền không thông thường, có thể MIRR không bị kẹp giữa các giá trị này.

Từ khóa: Tỷ suất hoàn vốn, NPV, IRR, MIRR, dòng tiền không thông thường.

1. Giới thiệu

Xét dòng tiền của một dự án

$$\boldsymbol{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n),$$

trong đó $f_t \in \mathbb{R}$, n là vòng đời của dự án. Nếu $f_0 < 0$ (> 0), dự án được gọi coi là đầu tư hay cấp vốn (investment projects, financial projects). Giả sử i là lãi suất thị trường, hoặc lãi suất kỳ vọng của nhà đầu tư, hoặc lãi suất hấp dẫn tối thiểu phù hợp (a suitable minimum attractive rate of return). Giá trị hiện tại ròng NPV (Net Present Value) của dòng tiền $\boldsymbol{f}$ cho bởi

$$NPV = f_0 + \frac{f_1}{(1+i)^1} + \cdots + \frac{f_n}{(1+i)^n} \quad (1)$$

Nếu $NPV > 0$ $(<, =)$ dự án đầu tư xem là khả thi (không khả thi, hòa vốn).

Tiêu chuẩn giá trị hiện tại ròng là chân thực và được công nhận rộng rãi. Bên cạnh NPV, tỷ suất hoàn vốn nội bộ IRR (Internal Rate of Return) là thước đo tốt, rất được ưa chuộng để đánh giá sức khỏe của doanh nghiệp. Theo định nghĩa, tỷ suất hoàn vốn nội bộ IRR là nghiệm của phương trình:

$$NPV = f_0 + \frac{f_1}{(1+i)^1} + \cdots + \frac{f_n}{(1+i)^n} = 0 \quad (2)$$

Với mức lãi suất kỳ vọng r, nếu $IRR > r$ $(<, =)$, dự án đầu tư xem là khả thi (không khả thi, hòa vốn) theo tiêu chuẩn IRR.

Đối với dự án đầu tư, $c_0 = -f_0 \geq 0$ là chi phí ban đầu. Chúng ta chỉ xem xét nghiệm của phương trình (2) trong $\mathbb{R}$. Phương trình này có thể vô nghiệm, có một nghiệm hoặc nhiều nghiệm. Chỉ những nghiệm lớn hơn -1 mới có ý nghĩa kinh tế. Chính vì thế, chỉ khi nó có nghiệm vượt quá -1 nó mới được coi là có nghiệm thực. Ta ký hiệu (**IRR**) là tập các nghiệm thực lớn hơn -1 của nó. Khi có nhiều nghiệm như thế, chúng ta ký hiệu nghiệm thứ k là IRR_k.

Những phát hiện đầu tiên về IRR phải kể đến các công trình của Irving Fisher (1930), John Maynard Keynes (1936). Về mặt toán học, IRR là nghiệm của phương trình tương đương phương trình đại số cấp n. Tính duy nhất nghiệm trong $(-1, \infty)$ được xem xét bởi Boulding (1936) [1].

Nghiên cứu chính quy về vấn đền này đề cập bởi Pitchford and Hagger (1958) [2], ở đó các ông khẳng định, nếu dòng tiền chỉ có một lần đổi dấu duy nhất thì IRR tồn tại và duy nhất trong $(-1, \infty)$. Liên quan đến nghiệm trong khoảng $(0, +\infty)$ chúng ta thấy các tài liệu [3], [4], [5]. Lời giải số cho IRR có thể tìm thấy ở một số phần mềm, trong đó đáng kể thuộc về Moten và cộng sự (2013) [6].

Gần một thế kỷ từ ngày ra đời, càng ngày người ta càng phát hiện thêm những khiếm khuyết của IRR cũng như tìm cách vượt qua các khiếm khuyết đó. Vì IRR là nghiệm của phương trình đại số cấp n nên có thể xảy ra trường hợp có nhiều nghiệm trong $(-1, +\infty)$. Khi đó "việc so sánh tỷ suất hoàn vốn nội bộ giữa các dự án loại trừ lẫn nhau nói chung là không có ý nghĩa, việc so sánh lãi suất với tỷ suất hoàn vốn nội bộ trong một dự án cũng không có ý nghĩa" [7].

Vấn đề tiếp theo là không tồn tại IRR. Rõ ràng, khi đó không có gì để so sánh với lãi suất thực tế r. Người ta cũng cố gắng nghiên cứu sang IRR phức ([7]), song các phát hiện rất hạn chế và còn chưa hoàn thiện. Trường hợp lãi suất biến thiên không thể giải quyết được thông qua tiêu chuẩn IRR. Trong [8], Magni đã đưa ra tới 18 lý do để tìm một độ đo mới cho tỷ suất hoàn vốn.

Dù sao, tiêu chuẩn IRR cũng có một loạt các ưu điểm. Sức hấp dẫn của nó ở chỗ đó là độ đo tương đối (tỷ lệ phần trăm ứng với chi phí vốn) dường như trực quan hơn so với số tiền tuyệt đối NPV.

Khắc phục những nhược điểm của IRR có nhiều giải pháp. Sử dụng tỷ suất hoàn vốn nội bộ hiệu chỉnh MIRR (Modified Internal Rate of Return) là một lời giải thuyết phục và được công nhận rộng rãi.

2. Tỷ suất hoàn vốn nội bộ hiệu chỉnh

Đối với dự án đầu tư với dòng tiền tự do $\boldsymbol{f}$ nói trên, để tiện lợi, chúng ta đặt:

$$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \text{ với } a_t = \max(f_t, 0) = \begin{cases} f_t & \text{nếu } f_t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x_t < 0, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n) \text{ với } c_t = -\min(f_t, 0) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f_t \geq 0 \\ -f_t & \text{nếu } f_t < 0 \end{cases}.$$

$\boldsymbol{a}$ là dòng tiền dương, thường được coi là lợi tức, $\boldsymbol{c}$ là dòng tiền âm, thường được coi là đầu tư. Dưới đây, chúng ta chỉ xét những dòng tiền của dự án đầu tư với $c_0 = -f_0 > 0, a_0 = 0$, $max(a_1, \dots, a_n) > 0$, được gọi là dòng tiền thực tế. Đó là dòng tiền của dự án đầu tư mà có bỏ vốn ban đầu thực sự và có doanh thu thực sự.

Tỷ suất hoàn vốn hiệu chỉnh MIRR được xét đến ở [9], [10] ... liên quan chặt chẽ đến tái đầu tư. MIRR được sử dụng để xếp hạng các dự án đầu tư; nó được ưa chuộng khi cần so sánh các dự án loại trừ nhau hoặc có những xung đột khi sử dụng NPV và IRR (xem [11]). Đặc biệt, có thể sử dụng tiêu chuẩn MIRR trong trường hợp quy mô dự án khác khau và thời gian kết thúc dự án khác nhau (xem [7]).

Để đơn giản, sau đây chúng ta xét trường hợp lãi suất tái đầu tư trùng với chi phí vốn.

Giá trị hiện tại F^- của dòng tiền âm $\boldsymbol{c}$, giá trị hiện tại F^+ và giá trị cuối cùng $TV(\boldsymbol{a})$ của dòng tiền dương $\boldsymbol{a}$ lần lượt được cho bởi:

$$F^- = PV(\boldsymbol{c}) = \sum_{t=0}^{n} \frac{c_t}{(1+i)^t},$$

$$F^+ = PV(\boldsymbol{a}) = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1+i)^t},$$

$$TV(\boldsymbol{a}) = \sum_{t=1}^{n} a_t (1+i)^{n-t}. \tag{3}$$

Tỷ suất hoàn vốn nội bộ hiệu chỉnh MIRR được cho bởi (xem, ví dụ [7], [9]):

$$MIRR = \sqrt[n]{\frac{TV(\boldsymbol{a})}{PV(\boldsymbol{c})}} - 1. \tag{4}$$

Bởi vì

$$\sqrt[n]{\frac{TV(\boldsymbol{a})}{PV(\boldsymbol{c})}} = \sqrt[n]{\frac{\sum_{t=1}^{n} a_t (1+i)^{n-t}}{\sum_{t=0}^{n} c_t (1+i)^{-t}}} = (1+i) \sqrt[n]{\frac{\sum_{t=1}^{n} a_t (1+i)^{-t}}{\sum_{t=0}^{n} c_t (1+i)^{-t}}},$$

nên chúng ta có thể tính MIRR thông qua i, F^+ và F^-:

$$MIRR = (1+i)\ \sqrt[n]{F^+/F^-} - 1. \quad (5)$$

Từ chỗ $F^- > 0, F^+ > 0,$ MIRR luôn xác định, duy nhất và $MIRR > -1$.

Có thể viết (5) dưới dạng

$$\left(\frac{MIRR+1}{1+i}\right)^n = \frac{F^+}{F^-}.$$

Rõ ràng $NPV = F^+ - F^-$ nên chúng ta nhận được

$$NPV = F^-\left[\left(1+\frac{MIRR-i}{1+i}\right)^n - 1\right] = F^-[(1+e_{MIRR})^n - 1], \quad (6)$$

trong đó

$$e_{MIRR} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{MIRR-i}{1+i}. \quad (7)$$

được xem là một dạng của hiệu quả kinh tế.

Nếu lãi suất nội tại $MIRR$ vượt quá lãi suất i thì e_{MIRR} dương; trái lại, nếu $MIRR$ chưa đạt lãi suất i thì e_{MIRR} âm. Mẫu số $1+i$ dùng để chuẩn hóa mức độ gia tăng lãi suất, và e_{MIRR} được dùng để đo mức độ hiệu quả kinh tế của dự án.

Khi lãi suất biến thiên, gọi lãi suất ở kỳ thứ t là $i_t > -1$. Đặt $\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_n)$ là véc tơ lãi suất, các công thức (1), (3) trở thành:

$$NPV = -c_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{f_t}{(1+i_1)\dots(1+i_t)}; \quad (1')$$

$$F^- = PV(\boldsymbol{c}) = c_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{c_t}{(1+i_1)\dots(1+i_t)},$$

$$F^+ = PV(\boldsymbol{a}) = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_t}{(1+i_1)\dots(1+i_t)}. \quad (3')$$

Công thức (4) vẫn còn hiệu lực. Tuy nhiên, cần thay lãi suất i ở (5) - (7) bởi chỉ số tăng trưởng trung bình (average growth rate) $\mathbb{i} = \sqrt[n]{(1+i_1)\dots(1+i_n)} - 1$:

$$MIRR = \left(\frac{TV(\boldsymbol{a})}{PV(\boldsymbol{c})}\right)^{1/n} - 1 = (1+\mathbb{i})\left(\frac{F^+}{F^-}\right)^{1/n} - 1, \quad (5')$$

$$NPV = F^-\left[\left(1+\frac{MIRR-\mathbb{i}}{1+\mathbb{i}}\right)^n - 1\right] = F^-[(1+e_{MIRR})^n - 1], \quad (6')$$

trong đó

$$e_{MIRR} = \frac{MIRR-\mathbb{i}}{1+\mathbb{i}} \quad (\mathbb{i} > -1). \quad (7')$$

Các đại lượng NPV, MIRR, F^+, F^- … phụ thuộc vào véc tơ lãi suất $\boldsymbol{i}$. Khi cần chỉ rõ chúng phụ thuộc vào $\boldsymbol{i}$ chúng ta sẽ viết NPV(**i**), MIRR(**i**), $\mathbf{F}^+(\mathbf{i})$, $\mathbf{F}^-(\mathbf{i})$ … tương ứng. Nếu lãi suất không đổi, ta viết chữ cái i như thường lệ hoặc bỏ đi hẳn.

Tính MIRR trong Excel khi lãi suất cố định hay biến thiên có thể xem ở [12].

3. Mối liên hệ giữa giá trị hiện tại ròng, lãi suất IRR và MIRR

Khi lãi suất không đổi, tiêu chuẩn MIRR là tương thích với tiêu chuẩn NPV. Điều này đã được nói đến ở [9], [10]. Đối với trường hợp lãi suất thay đổi, chúng tôi đưa ra mệnh đề sau đây nêu lên mối quan hệ giữa MIRR với NPV.

Mệnh đề 1. Đối với dòng tiền thực tế $\boldsymbol{f}$ và véc tơ lãi suất $\boldsymbol{i}$, các giá trị $NPV(\boldsymbol{i}),\ MIRR(\boldsymbol{i}) - \mathbb{i}$ luôn cùng dấu; hơn nữa, nếu một trong chúng bằng không thì giá trị kia cũng bằng không, cụ thể là:

(i) $MIRR(\boldsymbol{i}) = \mathbb{i} \Leftrightarrow NPV(\boldsymbol{i}) = 0,$

(ii) $MIRR(\boldsymbol{i}) > \mathbb{i} \Leftrightarrow NPV(\boldsymbol{i}) > 0,$

(iii) $MIRR(\boldsymbol{i}) < \mathbb{i} \Leftrightarrow NPV(\boldsymbol{i}) < 0.$

Chứng minh. Trước hết

$$1 + \frac{NPV(\boldsymbol{i})}{F^-(\boldsymbol{i})} = \frac{F^-(\boldsymbol{i}) + F^+(\boldsymbol{i}) - F^-(\boldsymbol{i})}{F^-(\boldsymbol{i})} = \frac{F^+(\boldsymbol{i})}{F^-(\boldsymbol{i})} > 0.$$

Cùng với (5') dẫn đến

$$MIRR(\boldsymbol{i}) - \mathbb{i} = (1+\mathbb{i})\left(\left(\frac{F^+(\boldsymbol{i})}{F^-(\boldsymbol{i})}\right)^{1/n} - 1\right) = (1+\mathbb{i})\left(\left(1+\frac{NPV(\boldsymbol{i})}{F^-(\boldsymbol{i})}\right)^{1/n} - 1\right).$$

Hơn nữa, $1+\mathbb{i} > 0, F^-(\boldsymbol{i}) > 0$ nên

$$MIRR(\boldsymbol{i}) - \mathbb{i} > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{NPV(\boldsymbol{i})}{F^-(\boldsymbol{i})} > 1$$

$$\Leftrightarrow NPV(\boldsymbol{i}) > 0.4$$

Chúng ta nhận được (ii). Các trường hợp khác lập luận tương tự.

Mệnh đề 1 khẳng định rằng, tiêu chuẩn MIRR tương đương với tiêu chuẩn NPV kể cả trong trường hợp lãi suất biến thiên, có điều phải so sánh MIRR(**i**) với chỉ số tăng trưởng trung bình $\mathbb{i}$. Cũng lưu ý rằng, khi lãi suất không đổi, $\boldsymbol{i}$ và $\mathbb{i}$ được thay thế bởi lãi suất i thông thường.

Hệ quả 2. Giả sử $\boldsymbol{f}$ là dòng tiền thực tế và lãi suất $i > -1$ không đổi. Khi đó:

i) $NPV(i) = 0 \;\Leftrightarrow\; MIRR(i) = i \;\Leftrightarrow\; i \in (\boldsymbol{IRR})$.

ii) $NPV(i) > 0 \;\Leftrightarrow MIRR(i) > i$.

iii) $NPV(i) > 0\ \forall i > -1 \Leftrightarrow MIRR(i) > i\ \forall i > -1$.

iv) Có thể thay đồng thời các bất đẳng thức ở (ii), (iii) bởi $\geq$, $<$ hoặc $\leq$.

Rõ ràng, (i), (ii) (iii) trực tiếp suy từ Mệnh đề 1 và từ định nghĩa của $(\boldsymbol{IRR})$. Có thể kiểm tra dấu " = " ," < " ở (iv) từ chứng minh của Mệnh đề 1.

Trong một số trường hợp, NPV(i) luôn giữ dấu, khẳng định (iii) là có ích.

Ví dụ 1. Nhiều tác giả đã xét dòng tiền $\boldsymbol{f} = (-10, 30, -25)$ làm minh họa cho lý thuyết của họ (chẳng hạn xem [8, Ví dụ 2]). Coi lãi suất i cố định, khi đó

$$NPV(i) = -10 + \frac{30}{1+i} - \frac{25}{(1+i)^2} < 0,\ \ i > -1.$$

Theo Hệ quả 2 (iv), $MIRR(i) < i$ với mọi $i > -1$. Có thể kiểm tra điều này, chẳng hạn: $MIRR(-0.2) = -0.3006 < -0.2,\ \ MIRR(0) = -0.0742 < 0,\ \ MIRR(0.4) = 0.3586 < 0.4 \ldots$

Bổ đề 3. Giả sử lãi suất i không đổi, **(IRR)** không trống và gọi IRR_k là một nghiệm của phương trình IRR. Xảy ra các kết quả sau đây:

i) Nếu $i = IRR_k$ thì $MIRR(i) = i = IRR_k$.

ii) Nếu $i < IRR_k$ thì $MIRR(i) < IRR_k$.

iii) Nếu $i > IRR_k$ thì $MIRR(i) > IRR_k$.

Bổ đề này đã nêu ở các bất đẳng thức (13), (14) trong [13], tuy nhiên ở đó nhóm tác giả không nói rõ IRR_k là một nghiệm của phương trình IRR. Sau đây chúng tôi đưa ra chứng minh rõ ràng hơn. Những bàn luận khác sẽ được nêu ra sau Định lý 4.

Chứng minh. Từ (5) chúng ta nhận được

$$\frac{(1+i)^n F^+(i)}{(1+MIRR(i))^n} - F^-(i) = 0$$
$$= F^+(IRR_k) - F^-(IRR_k).$$

Từ đó,

$$\frac{(1+i)^n F^+(i)}{(1+MIRR(i))^n} + F^-(IRR_k) - F^-(i)$$
$$= F^+(IRR_k)$$

hay

$$\frac{1}{(1+MIRR(i))^n}\sum_{t=1}^{n} a_t(1+i)^{n-t} + \sum_{t=1}^{n} c_t\left(\frac{1}{(1+IRR_k)^t} - \frac{1}{(1+i)^t}\right)$$
$$= \frac{1}{(1+IRR_k)^n}\sum_{t=1}^{n} a_t(1+IRR_k)^{n-t}. \quad (8)$$

+ Nếu $i = IRR_k$, số hạng thứ hai ở vế trái của (8) triệt tiêu, (8) trở thành:

$$\frac{1}{(1+MIRR(i))^n} = \frac{1}{(1+IRR_k)^n}$$

hay $MIRR(i) = IRR_k$.

+ Nếu $-1 < i < IRR_k$, số hạng thứ hai ở vế trái của (8) âm, từ đó:

$$\frac{1}{(1+MIRR(i))^n}\sum_{t=1}^{n} a_t(1+i)^{n-t} > \frac{1}{(1+IRR_k)^n}\sum_{t=1}^{n} a_t(1+IRR_k)^{n-t}.$$

Vậy,

$$\frac{(1+IRR_k)^n}{(1+MIRR(i))^n} > \frac{\sum_{t=1}^{n} a_t(1+IRR_k)^{n-t}}{\sum_{t=1}^{n} a_t(1+i)^{n-t}} > 1$$
$$\Rightarrow IRR_k > MIRR(i).$$

+ Lập luận tương tự đối với trường hợp $i > IRR_k > -1$.

Đối với dòng tiền không thông thường vẫn có thể IRR là duy nhất, hoặc $NPV(i) > 0\ \forall i$, hoặc $NPV(i) \geq 0\ \forall i$, hoặc các dấu bất đẳng thức ngược lại. Định lý sau đây nghiệm đúng cả với trường hợp dòng tiền không thông thường.

Định lý 4. Giả sử đối với dòng tiền thực tế $\boldsymbol{f}$, lãi suất i không đổi và phương trình IRR có nghiệm

IRR* duy nhất kể cả bội trong $(-1, +\infty)$. Các khẳng định sau là đúng:

i) $NPV(i) > 0$ với mọi $i \neq IRR^* \Leftrightarrow MIRR(i) > i$ với mọi $i \neq IRR^*$.

ii) $NPV(i) < 0$ với mọi $i \neq IRR^* \Leftrightarrow MIRR(i) < i$ với mọi $i \neq IRR^*$.

iii) Nếu $NPV(t)$ đổi dấu khi t qua IRR* thì MIRR bị kẹp giữa i và IRR*, cụ thể là:

Nếu $i < IRR^*$ thì $i < MIRR(i) < IRR^*$.

Nếu $i > IRR^*$ thì $IRR^* < MIRR(i) < i$.

Chứng minh. Khẳng định (i), (ii) suy trực tiếp từ Hệ quả 2.

Để chứng minh (iii), từ giả thiết, NPV có thể được viết dưới dạng

$$NPV(t) = (t - IRR^*)^{\ell} g(t) \qquad (9)$$

trong đó ℓ là số bội của nghiệm IRR* của phương trình IRR, $g(t)$ là hàm liên tục trong $(-1, +\infty)$ và không triệt tiêu trong khoảng này.

Vì $NPV(t)$ đổi dấu khi t qua IRR* nên ℓ là một số lẻ. Hơn nữa, vì $g(t)$ là hàm liên tục nên nó giữ dấu trên khoảng $(-1, +\infty)$. Lại có

$$\lim_{t\to+\infty} (t - IRR^*)^{\ell} g(t) = \lim_{t\to+\infty} NPV(t) = f_0 < 0.$$

Vậy $g(t) < 0$ với mọi $t > -1$.

Giả sử $i < IRR^*$. Từ (9), $NPV(i) > 0$. Theo Mệnh đề 1, $MIRR(i) > i$.

Bất đẳng thức $MIRR(i) < IRR^*$ suy ra từ Bổ đề 3 (i). Vậy $i < MIRR(i) < IRR^*$.

Giả sử $i > IRR^*$. Từ (9), $NPV(i) < 0$. Theo Mệnh đề 1, $MIRR(i) < i$.

Khẳng định $IRR^* < MIRR(i)$ nhận được từ Bổ đề 3 (ii). Vậy $IRR^* < MIRR(i) < i$, (iii) được chứng minh.

Nhận xét

1) Các bất đẳng thức ở (iii) được nhắc đến ở [11, tr. 327], nhưng chỉ với vài trường hợp đơn lẻ.

2) Đối với dòng tiền thông thường thì IRR là duy nhất, $NPV(t)$ đổi dấu khi t qua IRR và do đó xảy ra (iii).

3) Điều kiện NPV(t) đổi dấu khi t qua IRR ở (iii) không bỏ qua được. Xét Ví dụ 3 ở dưới.

4) Hình 7 và Hình 8 trong [13] dẫn tới hiểu nhầm (iii) là:

iii*) Nếu $i < IRR_k$ thì $i < MIRR(i) < IRR_k$.

Nếu $i > IRR_k$ thì $i > MIRR(i) > IRR_k$.

kể cả với dòng tiền không thông thường. Thực ra, trong trường hợp tổng quát, (iii*) không đúng, xem Ví dụ 4 ở dưới.

Ví dụ 2.

Xét $\boldsymbol{f} = (-100, 80, -40, 90, 30, -120, 70, 90)$, $i = 10\%$ nêu ra trong [8, Ví dụ 6].

Mặc dầu đây là dòng tiền không thông thường nhưng chúng ta thấy $IRR = 0.2245$ duy nhất và NPV(t) đổi dấu khi t qua IRR. Lại có $i < IRR$, theo Định lý 4 (iii) sẽ xảy ra $i < MIRR < IRR$.

Để kiểm tra, tính toán cụ thể chúng ta nhận được:

$$NPV = 38.96 > 0, F^- = 207.57, F^+ = 346.53,$$
$$\mathrm{MIRR} = 0.12737.$$

Như vậy, đã xảy ra $i < MIRR < IRR$ như đòi hỏi của Định lý 4 (iii). Rõ ràng

$$e_{MIRR} = \frac{MIRR - i}{1 + i} = 0.02488 > 0.$$

Ví dụ 3. Xét dòng tiền thực tế $(-9,\ 30, -25)$ (trong [8, Ví dụ 2], Magni xét dòng tiền $(-10, 30, -25)$).

Ở đây, $IRR = 0.6667$ duy nhất, $NPV(i) < 0$ với $i \neq IRR$. Tính toán chi tiết có thể thấy:

Với $i = -0.1$ thì $MIRR = -0.1770$: $MIRR < i$, nhưng không xảy ra $IRR < MIRR < i$.

Với $i = 0.2$ thì $MIRR = 0.1686$: $MIRR < i$, nhưng không xảy ra $IRR < MIRR < i$.

Ví dụ 4. Xét dòng tiền $\boldsymbol{f} = (-1000, 3580, -4260, 1684.8)$ nêu trong [14, Bảng 2].

Dòng tiền **f** không thông thường, các tỷ suất hoàn vốn nội bộ là $IRR_1 = 0.08, IRR_2 = 0.20, IRR_3 = 0.30$. Bảng 1 đưa ra kết quả tính toán các giá trị hiện tại ròng NPV, các tỷ suất lợi nhuận MIRR ứng với một số giá trị của lãi suất i.

Sắp sếp theo thứ tự tăng dần các lãi suất i, IRR_k và MIRR chúng ta thu được Bảng 2.

Như vậy, trừ ba giá trị đầu tiên và hai giá trị cuối cùng của lãi suất tác động, đối với các lãi suất ở mức trung bình $(i = 0.10, 0.15, 0.2)$, MIRR không bị kẹp giữa i với IRR, cụ thể là:

Với $i = 0.10 < IRR_2 = 0.20$, $MIRR = 0.09998$: Không xảy ra $i < MIRR < IRR_2$.

Với $i = 0.15 < IRR_2 = 0.20$, $MIRR = 0.14997 < i = 0.15$: Không xảy ra $i < MIRR < IRR_2$.

Với $i = 0.20 > IRR_1 = 0.08$, MIRR và i trùng nhau, $MIRR = i = 0.15$: Không xảy ra $IRR_1 < MIRR < i$.

Bảng 1. Giá trị NPV và MIRR theo lãi suất i của dòng tiền ở Ví dụ 4

i	-0.05	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.35	0.5
NPV	13.2672	4.8000	0.9718	-0.3005	-0.3452	0.0000	-0.8230	-7.4667
MIRR	-0.04927	0.00030	0.05007	0.09998	0.14997	0.20000	0.34989	0.49871

Bảng 2. Thứ tự các tỷ suất lợi nhuận từ dòng tiền ở Ví dụ 4

i	Thứ tự tăng dần									sgn(NPV)
-0.05	i	MIRR	IRR_1			IRR_2	IRR_3			+
0.00	i	MIRR	IRR_1			IRR_2	IRR_3			+
0.05	i	MIRR	IRR_1			IRR_2	IRR_3			+
0.10			IRR_1	MIRR	i	IRR_2	IRR_3			-
0.15			IRR_1	MIRR	i	IRR_2	IRR_3			-
0.20			IRR_1	i	MIRR	IRR_2	IRR_3			0
0.35			IRR_1			IRR_2	IRR_3	MIRR	i	-
0.50			IRR_1			IRR_2	IRR_3	MIRR	i	-

4. Kết luận

Bài viết liên quan chủ yếu đến các dự án đầu tư, nhưng người đọc dễ dàng mở rộng sang các dự án cấp vốn.

Tỷ số hoàn vốn nội bộ hiệu chỉnh MIRR được trình bày trong các trường hợp lãi suất cố định và lãi suất biến thiên. Chúng tôi chỉ ra rằng, tiêu chuẩn NPV là thống nhất với tiêu chuẩn MIRR kể cả trong trường hợp lãi suất biến thiên, miễn là cần phải so sánh MIRR(**i**) với chỉ số tăng trưởng trung bình $\mathbb{i}$. Trong trường hợp dòng tiền thực tế, lãi suất không đổi và $NPV(t)$ đổi dấu khi t qua IRR duy nhất thì MIRR bị kẹp giữa i và IRR. Các ví dụ chứng tỏ rằng, điều kiện đổi dấu của $NPV(t)$ không bỏ qua được. Hơn nữa, với dòng tiền bất kỳ, có thể xảy ra MIRR không bị kẹp giữa i và IRR, trái với những suy diễn ở Hình 7, Hình 8 của tài liệu [13]. Để minh họa cho các phát hiện, các dòng tiền đề cập đến trong bài báo được lấy ra từ các tài liệu đã công bố rộng rãi.

Tài liệu tham khảo

[1] K.E. Boulding. (1936). Time and investment: A reply. *Economica*, 3(12), pp. 440-442.

[2] J.D. Pitchford, and A.J. Hagger. (1958). A note on the marginal efficiency of capital. *The Economic Journal*, 68, pp. 597-600.

[3] C.J. Norstrøm. (1972). A sufficient condition for a unique non-negative internal rate of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 7(3), pp. 1835-1839.

[4] R.H. Bernhard. (1979). A more general sufficient condition for a unique internal rate of return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14, pp. 337-341.

[5] T.V. Ban and T.M. Anh. (2023). Some problems with the net present values and the internal rate of returns under determinate and indeterminate conditions. *HNUE Journal of Science, Natural Sciences,* 68(2), pp. 83-96.

[6] J. Moten, and C. Thron. (2013). Improvements

on Secant Method for Estimating Internal Rate of Return. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 42(12), pp. 84-93.

[7] G.B. Hazen. (2003). New perspective on multiple Internal Rates of Return. *The Engineering Economist*, 48(1), pp. 31-51.

[8] C.A. Magni. (2013). The Internal-Rate-Of-Return Approach and the AIRR Paradigm: A Refutation and a Corroboration. *The Engineering Economist*, 58(2), pp. 73-111.

[9] Г. С. Староверова, А. Ю. Медведев, & И., В. Сорокина. (2006). Экономическая оценка инвестиций, Москва, КНОРУС.

[10] D. Eagle, D. Kiefer, and B. Grinder. (2008). MIRR vs. IRR: exploring the logic of the incremental reinvestment assumption. *Journal of International Finance and Economics*, 8(4), pp. 69-75.

[11] H. Kierulff. (2008). MIRR: A better measure. *Business Horizons*, 51(4), pp. 321-329.

[12] L. Machain. (2005). Funciones Financieras Adicionales para Microsoft Excel® http://www.cashflow88.com/decisiones/funciones_financieras.pdf

[13] O. Yankovyi, Y. Kozak, M. Lyzun, I. Lishchynskyy, Y. Savelyev, & V. Kuryliak. (2022). Investment decision based on analysis of mathematical interrelation between criteria IRR, MIRR, PI. *Financial and Credit Activity Problems of Theory and Practice*, 5(46), pp. 171-181.

[14]. I. Speranda, and Z. Speranda. (2019). The comprehensive method of solving the multiple internal rate of return problem. *Montenegrin Journal of Economics*, 15(1), pp. 73-86.