Journal of Science and Transport Technology

University of Transport Technology

Article info
Type of article:
Original research paper

DOI:
https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2024.vn.4.1.27-35

*Corresponding author:
E-mail address:
bknguyenvantien@gmail.com

Received: 29/12/2023
Accepted: 15/3/2024
Published: 30/3/2024

Solving conic problems without using algebra analysis

Nguyễn Văn Tiến

University of Transport Technology, Vietnam

Abstract: In this article, with 1 non-degenerate conic given by equivalent to 5 real points, how to: determine any other points of this conic, find the axis center, find the intersection of a straight line with a conic, draw a tangent from 1 point belongs or does not belong to the curve, draw a polar of 1 point, draw a pole of the straight line... The computer will draw about 1000 points of the conic then connect, and edit into a smooth, solid curve. Those quadratic lines, which are ellipse, hyperbola, parabola, cannot be drawn into a solid curve with a simple tool like a compass. In this article, we will show how to solve these problems, according to construction methods; From there, do programming, to use whenever needed, without having to create analytic expressions.

Key words: projective point rang, projective line beam, Pascal's theorem, homology.

Tạp chí điện tử
Khoa học và Công nghệ Giao thông
Trường Đại học Công nghệ GTVT

Các bài toán về conic không dùng giải tích, đại số

Nguyễn Văn Tiến
Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, Việt Nam

Thông tin bài viết
Dạng bài viết:
Bài báo nghiên cứu

DOI:
https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2024.vn.4.1.27-35

***Tác giả liên hệ:**
Địa chỉ E-mail:
bknguyenvantien@gmail.com

Ngày nộp bài: 29/12/2023
Ngày chấp nhận: 15/3/2024
Ngày đăng bài: 30/3/2024

Tóm tắt: Trong bài này nêu ra với 1 conic cho đủ, bởi 1 số điểm thực, làm thế nào: xác định các điểm bất kì khác của conic này, tìm tâm trục, tìm giao điểm 1 đường thẳng với 1 conic, vẽ tiếp tuyến từ 1 điểm thuộc, hay không thuộc đường cong, vẽ đường thẳng đối cực 1 điểm, vẽ điểm đối cực 1 đường thẳng… Máy tính vẽ khoảng 1 ngàn điểm của conic rồi nối, và chỉnh sửa thành 1 đường cong trơn, liền nét. Các đường bậc hai đó, là elip, hypecbol, parabol, vốn không vẽ thành 1 đường đường cong liền nét bằng 1 dụng cụ đơn giản như compa… Trong bài này sẽ nêu cách giải những bài toán này, theo các cách dựng hình; từ đó làm lập trình, để sử dụng mỗi khi cần, mà không phải lập biểu thức giải tích.

Từ khoá: hàng điểm xạ ảnh, chùm đường thẳng xạ ảnh, định lí pascal, phép thấu xạ.

Kí hiệu: ϵ là thuộc, ∩ là giao, ∠ là góc, |V| là xạ ảnh với …

1. Mở đầu

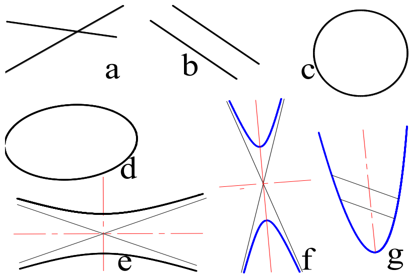
Đường bậc hai suy biến là 1 cặp đường thẳng, hay đường bậc hai khi là 1 đường tròn, thì vẽ ra bằng thước thẳng, hay compa được cả đường tròn. Những conic không suy biến, và không tròn có thể là elip, parabol, hay hypecbol, ta kí hiệu chung là co.nr (nr nghĩa là không tròn).

Mỗi cán bộ kĩ thuật công nghiệp, hay công trình, kiến trúc đã được trang bị về các đường và mặt cong bằng giải tích. Tuy nhiên, nên bổ sung thêm các kiến thức, về hình học chiếu (còn gọi là hình học xạ ảnh), có rất nhiều kết quả về conic…, mà không chỉ dựa trên kiến thức về giải tích. Elip và hypecbol thì có tâm, và 2 trục; còn parabol, là conic không có tâm, và chỉ có 1 trục. Cả 3 loại conic này, còn có tiêu điểm, đường chuẩn. Trên Hình 1: đường bậc hai gồm có: cặp 2 đường thẳng, đường tròn, hypecbol tù, nhọn, vuông; parabol.

Những co.nr, vẽ bằng máy tính, theo cách giải tích, hay đồ hoạ, cũng cần xác định rất nhiều điểm liền nhau, nối lại gần đúng thành đường cong "liền nét". Mà cách của đồ hoạ, được xây dựng trên nền tảng của môn học Autocad, sinh viên kĩ thuật đã được học.

Vì thế, các co.nr, có tâm: là elip và hypecbol từ việc xác định đủ bằng tương đương 5 điểm, cần tìm tâm, trục, đỉnh và góc định dạng (hay tiệm cận) của nó; còn parabol, thì phải xác định trục, và đỉnh parabol… Những bài toán về 1 đường bậc hai cho bằng 5 điểm đồng phẳng: tìm các tham số về đường bậc hai đó, như: tâm, trục, tiệm cận, góc định dạng, tiêu điểm… và làm các phép tính về conic… còn những tính toán về chiều dài cung cong, hay diện tích phần hình cong, cũng đều thực hiện được, trong Autocad, với hình vẽ, mà không cần biểu thức giải tích…

Trong bài này, tôi chỉ dùng các lí thuyết của hình học xạ ảnh, và đưa ra cách dựng hình bằng thước thẳng, compa, từ 5 điểm của co.nr đã cho, vẽ nhanh và chính xác 1 conic là 1 đường cong liền nét, có tâm, trục, đỉnh conic co.nr, để từ đó, tìm được phương trình chính tắc của conic.



Hình 1a,b,c,d,e,f,g. Các loại conic

2. Một số kiến thức hình học xạ ảnh về conic

Theo các tài liệu tham khảo, có thể rút ra 1 số kiến thức về hình xạ ảnh, như sau.

1/ Tỉ số đơn, đã có trong hình học Ơclid, cho các điểm khác nhau A,B,C,D trên 1 đường thẳng, gọi tỉ số chiều dài 2 đoạn ví dụ AB : BC, là tỉ số đơn của 3 điểm thẳng hàng. Nếu chiếu song song 3 điểm trên lên 1 đường thẳng khác, thành 3 điểm khác nhau, thì có tỉ số mới A'B' : B'C' = AB : BC = cte.

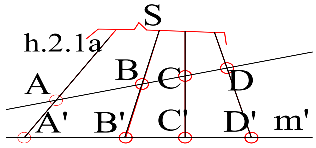
2/ Tỉ số kép 4 điểm thẳng hàng. là 1 khái niệm của hình học xạ ảnh. Trên 1 đường thẳng m, có 4 điểm ABCD, khác nhau, và xác định 1 chiều dương, của các số đo chiều dài đoạn thẳng, thì lập được 1 số tỉ số ví dụ ($\overline{CA}$: $\overline{CB}$) / ($\overline{DA}$: $\overline{DB}$) = s; xem Hình 2.1a mỗi số đó gọi là tỉ số kép của 4 điểm thẳng hàng. tỉ số kép của 4 điểm ABCD trên 1 đường thẳng m. Từ 4 điểm thẳng hàng đã cho, có thể lập 1 số tỉ số kép khác nhau. Nếu gắn trên đường thẳng này, 1 gốc toạ độ x, thì tỉ số kép trên bằng ((Xa-Xc) : (Xb-Xc)) : ((Xa-Xd) : (Xb-Xd)).

Chiếu xuyên tâm S, 4 điểm này lên 1 đường thẳng khác, là A'B'C'D', ta chứng minh được tỉ số kép của 4 điểm tương ứng bằng tỉ số kép 4 điểm trước, và kí hiệu là (A'B'C'D') = (ABCD)

Hai cặp điểm chia điều hòa: nếu 4 điểm AB, CD chia rẽ nhau, và có tỉ số kép = -1, thì gọi là 2 cặp điểm chia điều hòa.

Các điểm có 1 đặc tính nào đó, cùng thuộc 1 đường thẳng, gọi là 1 hàng điểm. Đường chứa mỗi hàng điểm này, là giá của hàng điểm.

Hai hàng điểm ABC… và A'B'C'… gọi là xạ ảnh với nhau, nếu một điểm D ϵ hàng (ABC), thì tìm được 1 điểm D' ϵ hàng (A' B' C'), để có tỉ số kép (ABCD) = (A' B' C' D').



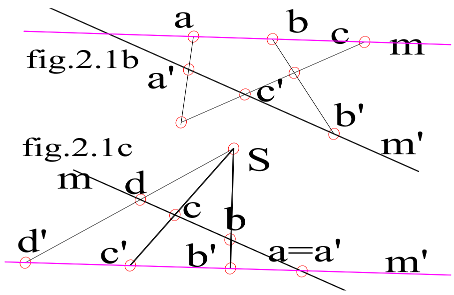
Hình 2.1a. Chiếu xuyên tâm m(ABCD) lên m'(A'B'C'D')

3/ Điểm vô tận, đường thẳng vô tận.

Mặt phẳng xạ ảnh là mặt phẳng Ơclid, có bổ sung các điểm vô tận, đường thẳng vô tận.

Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng Ơclid, có 1 điểm xa vô tận, và đường thẳng này coi như đóng kín. Hai đường thẳng //, thì cắt nhau ở 1 điểm xa vô tận. Trong liên hệ xạ ảnh của hai hàng điểm trên 2 đường thẳng khác nhau, hay trên cùng 1 đường thẳng: ví dụ A,B,C ϵ m tương ứng A',B',C' ϵ m'; điểm vô tận ϵ m có thể tương ứng 1 điểm xác định nào đó ϵ m', điểm vô tận của m' tương ứng 1 điểm xác định nào đó của m. Trong liên hệ xạ ảnh của 2 trường điểm và đường thẳng, mỗi trường có 1 đường thẳng vô tận, ảnh của đường thẳng vô tận của trường này, là 1 đường thẳng xác định của trường kia…

4/ Hai hàng điểm xạ ảnh có thể khác giá, có thể cùng giá.



Hình 2.1b&2.1c. Hai hàng điểm xạ ảnh

Xét trường hợp hai hàng điểm xạ ảnh trên 2 đường thẳng m ≠ m'. Giao điểm m x m' = điểm I. Nếu điểm I ϵ m, điểm tương ứng I' ϵ m', mà I' ≠ I, trên Hình 2.1b ta có hai hàng điểm không phối cảnh. Các đường thẳng nối mỗi cặp điểm tương ứng, không đồng qui. Trường hợp m∩m', có hai điểm tương ứng của hai hàng điểm xạ ảnh trùng nhau ví dụ a≡a'. Hình 2.1c, thì có hai hàng điểm xạ ảnh phối cảnh. Đường thẳng nối các cặp điểm tương ứng, cùng cắt nhau ở 1 điểm S, gọi là tâm phối cảnh của hai hàng điểm này. Hai hàng điểm không phối cảnh, trên hai đường thẳng khác nhau, thì chiếu xuyên tâm 2 lần, sẽ lập được hàng này, từ hàng kia.

5/ Hai chùm đường thẳng xạ ảnh

Trong 1 mặt phẳng Oxy, cho chiều dương của góc. Tỉ số kép của chùm 4 đường thẳng đồng phẳng & cùng đi qua 1 điểm: K(abcd) có tỉ số kép: (abcd) = ((sin ca): (sin cb)) / ((sin da) : (sin db)). Mặt phẳng chứa chùm đường thẳng gọi là mặt phẳng giá.

Cho trong 1 mặt phẳng, hay trong 2 mặt phẳng, 2 chùm đường thẳng A(cde), và B(c’d’e’) cứ lấy 1 đường thẳng Am trong chùm A, thì tìm được 1 đường thẳng Bm’ của chùm B, sao cho tỉ số kép A(cde m) = B(c’d’e’ m’) thì có 2 chùm đường thẳng xạ ảnh A(cde m) |V| B(c’d’e’ m’)

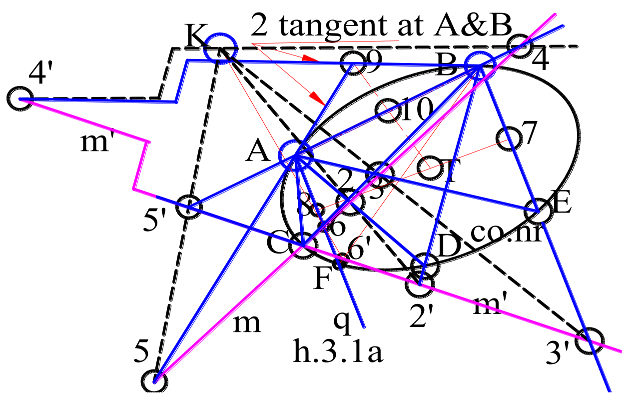
Để xác định hai chùm đường thẳng xạ ảnh: cần cho 2 chùm đường thẳng, mỗi chùm có 3 đường thẳng khác nhau A(cde) và B(c’d’e’).

6/ Đường bậc hai xác định bởi 5 điểm

*Theo cách giải tích: mỗi điểm đã cho, có 2 toạ độ x,y. Từ 5 điểm lập được 1 phương trình bậc hai: $a.X^2 + b.Y^2 + cXY + dX + eY + 1=0$, Phương trình, có 5 hệ số chưa biết, nên có 5 điểm xác định đường cong, là tìm được 5 hệ số a,b,c,d,e & vẽ được đường conic theo các giá trị x,y.

Tuy nhiên cần biến đổi các biểu thức giải tích, để tìm phương trình chính tắc của đường cong…

* Theo cách dựng hình dùng thước thẳng…



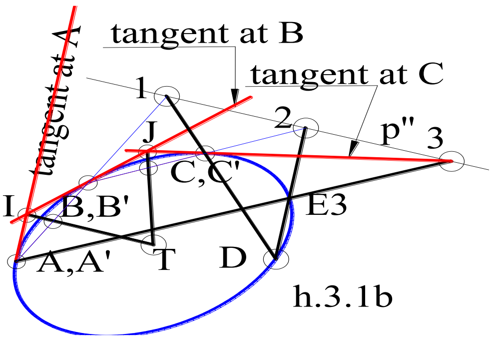
Hình 3.1a. Lập chùm A(CDE) |V| chùm B(CDE)

Với 2 chùm đường thẳng xạ ảnh, lập từ 5 điểm đã cho, là A(CDE) và B(CDE)… trên Hình 3.1a.

Mệnh đề: Với 2 chùm đường thẳng xạ ảnh không phối cảnh: giao điểm của những cặp tia tương ứng: c∩c’, d∩d’, e∩e’ …thì cùng ϵ 1 conic không suy biến, đi qua 2 tâm chùm là A,B.

Mệnh đề: Với 2 chùm đường thẳng xạ ảnh phối cảnh: giao điểm của mỗi cặp tia tương ứng, là 1 conic suy biến: đường thẳng thứ nhất là 2 tia tương ứng trùng nhau, đường thẳng thứ hai nối các giao điểm 2 tia tương ứng khác, tức là các giao điểm: c∩c’, d∩d’, e∩e’ cùng ϵ 1 đường thẳng, cùng với đường thẳng AB; là 1 cặp 2 đường thẳng…

Đường bậc hai xác định bởi 5 điểm: nếu 5 điểm đồng phẳng, không có 3 điểm thẳng hàng, thì xác định 2 chùm đường thẳng xạ ảnh, và theo mệnh đề này, 2 chùm đường thẳng này cho 1 conic không suy biến…



Hình 3.1b. Tìm tâm T, từ 3 tiếp tuyến ở A,B,C

Có thể dựng conic theo định lí Pascal về 6 điểm ϵ 1 đường conic. Trên Hình 3.1b, cho 5 điểm ABCDE của co.nr. Điều kiện ắt có và đủ để 6 điểm ABCDEF cùng thuộc 1 conic, là giao điểm của 3 cặp cạnh đối diện: FA cắt CD ở điểm 1, AB cắt DE ở điểm 2, BC cắt EF ở điểm 3; 3 điểm 1-2-3 phải thẳng hàng thuộc 1 đường thẳng Pascal p. -Có thể dựng conic theo biến đổi cộng tuyến: biến 1 đường tròn thành 1 conic đã cho…

Tuy nhiên các cách dựng hình do người vẽ: dùng thước, compa, vừa chậm, thiếu chính xác, lại còn chưa đủ: vì chưa tìm tâm, và trục co.nr. Vì thế, nên sau đó, người ta đã dùng phương pháp chứng minh theo giải tích, thì tìm được phương trình chính tắc, vẽ ra conic từ 5 điểm, là có tâm, có trục conic.

Các tài liệu tôi tham khảo, đều là giáo trình hình học… thường có phát biểu, chứng minh và hình vẽ minh hoạ. Tài liệu [1],[2] phát biểu, chứng minh theo dựng hình, có dùng đại số và giải tích, tính ra khoảng 20% số trang. Còn trong [3],[4] thì ngược lại dùng đại số và giải tích tới 70%, trong [5], thì chỉ dùng đại số, giải tích, nhưng dùng giải tích là chính.

7. Chứng minh 1 kết quả hình học theo tổng hợp:

Từ tương đương 5 điểm xác định 1 conic, trong đó không có 3 điểm thẳng hàng, cần phải dùng máy tính, tìm nhanh và chính xác: vài trăm điểm, hay trên ngàn điểm nếu conic đó là hypecbol, hay parabol. Tìm tâm, tìm trục, tìm đỉnh của conic đó… Từ đó, khi cần, có thể tìm tiêu điểm, đường chuẩn. Việc vẽ conic, hay vẽ các đường cong, mặt cong theo dựng hình, phải thực hiện 3 việc:

a/ Chứng minh và chỉ ra các phép vẽ dùng thước thẳng, compa cần có từ hình cho, vẽ ra đường cong, mặt cong cần tìm.

b/ Viết những câu lệnh autolisp, để máy tính tự động vẽ nhanh và chính xác những phép dựng hình trên, tạo ra đường hay mặt cong cần tìm… hình rất sáng, vì chỉ vẽ ra kết quả cần có.

c/ Máy tính vẽ ra hình cần tìm, ví dụ là 1 en lip, chỉ kèm theo tâm trục, gắn 1 hệ trục T xc yc, vào tâm và 2 trục elip. Để xác định 2 bán trục a,b, và gắn 1 hệ trục ngang dọc Oxy trên mặt phẳng chứa elip, để xác định x,y của tâm elip, và góc nghiêng của 1 trục elip… ; Từ đó viết được phương trình chính tắc của hình cần tìm…

Trở lại bước a, Để vẽ ra conic theo cách dựng hình thì phải chứng minh việc tìm ra tâm, và trục mỗi conic.

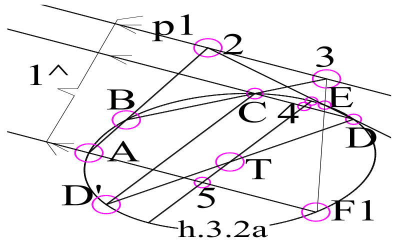
3. Khảo sát conic theo liên hệ xạ ảnh & định lí pascal

3.1. Áp dụng liên hệ xạ ảnh

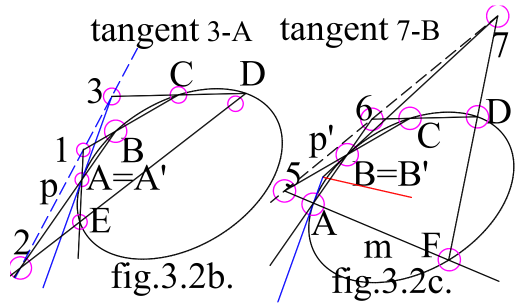
Cho trên Hình 3.1a, 5 điểm xác định conic co.nr, lập 2 chùm đường thẳng xạ ảnh A(CDE…) |V| B(CDE…).

Có thể vẽ 1 tia qua A, tính tỉ số kép 4 tia A(CDE f) và tìm tia Bf' sao cho tỉ số kép (B(CDE f') = (A(CDE f)). Nhưng việc tính toán thì dài, nên tôi dùng cách vẽ: vẽ đường thẳng Cm, Cm'. Đường thẳng AD, BD cắt m, m' ở 2,2'; nối đường thẳng 2-2', Đường thẳng AE, BE cắt m,m' ở 3,3'; đường thẳng 2-2' cắt 3-3' ở K là tâm phối cảnh,… Nếu vẽ qua A, 1 đường thẳng A-q cắt m ở 6, nối K-6, cắt m' ở 6', đường thẳng B-6' cắt A-q ở điểm F ϵ co,nr. Cho đường thẳng A-q quanh quanh A, sẽ tìm được vô số điểm F nói trên… Nếu lấy 1 đường thẳng A-q // BE, thì được 1 vị trí AF // BE. Đường thẳng nối 2 trung điểm 6-7 của AF//BE chứa 1 đường kính liên hợp của BE. Đường thẳng AB coi là của chùm A, đường AB cắt Cm ở 4, nối K-4 cắt Cm' ở 4'. Đường thẳng 4-B là tiếp tuyến của co.nr ở B. Tương tự, đường thẳng A-5 là tiếp tuyến ở A. Hai tiếp tuyến cắt nhau ở 9. Trung điểm của đoạn AB là 10. Đường thẳng 9-10, cắt đường thẳng 7-8 ở tâm T của co.nr(ABCDE).

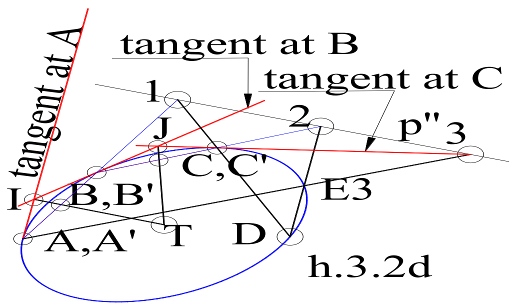
3.2. Áp dụng định lí Pascal…



Hình 3.2a. tìm tâm T của conic



Hình 3.2b. tiếp tuyến ở A; **Hình 3.2c.** tiếp tuyến ở B



Hình 3.2d. Tìm tâm T, từ 3 tiếp tuyến ở A,B,C

Như trên Hình 3.2c, khi đường thẳng Am quanh quay A trong mặt phẳng (ABCCDE), mỗi vị trí, cho 1 điểm F ϵ co.nr, nối lại ta được conic co.nr.

Trên Hình 3.2a: qua A, vẽ 1 đường thẳng // CD, đường thẳng này cắt cạnh đối CD ở điểm vô tận 1^. đường thẳng AB cắt cạnh đối DE ở điểm 2. Nối đường thẳng p(1^-2). đường thẳng BC cắt p(1^-2) ở 3. Nối đường thẳng 3-E cắt đường thẳng A-1^ ở điểm F1 ϵ co.nr. Đường thẳng nối trung điểm 4, 5 là đường thẳng chứa 1 đường kính liên hợp của CD // AF1. Qua C, vẽ đường thẳng // đường thẳng 4-5. Cũng áp dụng pascal, tìm được điểm mút D', và chứng minh được D-D' là 1 đường kính của co.nr, cắt đường thẳng 4-5 ở T, là tâm co.nr. Trên Hình 3.2b: cho 5 điểm ABCDE của elip, ta cho thêm 1 điểm A'≡A, trên 1 tiếp tuyến chưa biết, tức là đã có 6 đỉnh, 6 cạnh của lục giác. Cạnh AE có cạnh đối là BC, và cho giao điểm 1; cạnh A'B cắt cạnh đối DE ở 2. Nối p(1-2). Cạnh CD cắt p ở 3. Nối 3-A' là tiếp tuyến ở 1 điểm A=A'ϵ co.nr. Hình 3.2c, cho 5 điểm A,B,C,D, F xác định elip. Ta thêm điểm B'≡B trên 1 tiếp tuyến chưa biết. Cho FA là cạnh 1, cắt cạnh 4, tức là B'-C ở 1, cạnh 2 là AB cắt cạnh 5 là CD ở 2. Nối đường thẳng p', cạnh 5 là DF cắt p' ở 3, Nối 3-B' là tiếp tuyến 3-B-B'. Như vậy, trên Hình 3.2b, 3.2c, ta đã xác định được 2 tiếp tuyến ở 2 điểm trong 5 điểm đã cho của elip… Hình 3.2d, tìm thêm tiếp tuyến thứ 3, ở điểm C≡C', tiếp tuyến ở A và B cắt nhau ở I… tiếp tuyến ở C và B cắt nhau ở J., Nối I với trung điểm A'-B, nối J với trung điểm B'C, 2 đường thẳng này cắt nhau ở tâm T của elip. Cũng có thể xác định 2 tiếp tuyến, và 1 dây cung song song (1 phần của Hình 3.2b), từ đó cũng tìm được tâm T của elip. Tóm lại dùng định lí Pascal, ta tìm được tiếp dây cung //, tiếp tuyến,…và tâm conic có 5 điểm đã cho.

4. Tìm trục, đỉnh của elip, hypecbol, parabol

4.1. Liên hệ đối hợp

a/Về liên hệ đối hợp: Với 2 hàng điểm xạ ảnh cùng giá, có tính chất đối hợp, nếu điểm tương ứng với bất cứ điểm nào đã cho, không phụ thuộc vào việc ta xem điểm đã cho là thuộc hàng này, hay hàng kia.

Liên hệ xạ ảnh đối hợp, chỉ cần cho bởi 2 cặp điểm tương ứng. ví dụ 1'-1'', 2'-2'', hay 2 cặp đường thẳng tương ứng: O a'-a'', b'-b''.

b/ Ví dụ về liên hệ đối hợp, xem Hình 4a

Định lí Desarguer 2: Một đường thẳng t không đi qua 1 điểm chung nào của chùm conic, nói chung cắt mỗi conic của chùm conic đã cho, theo 2 điểm khác nhau, hai cặp điểm cắt conic của chùm, xác định 1 liên hệ đối hợp, trên t.

Ta chứng minh được rằng các cặp đường kính liên hợp, của 1 conic có tâm (elip, hay hypecbol) tạo thành 2 chùm đường thẳng đối hợp, trong conic đó.

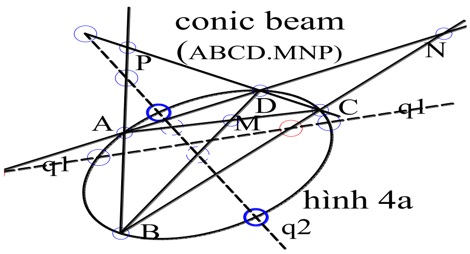
4.2. Định lí Phơ rê giê: xem Hình 4b, Hình 4c.

Hai hàng điểm cùng giá và đối hợp, hay hai chùm đường thẳng cùng tâm và đối hợp có thể đưa lên 1 đường tròn giá, Các đường thẳng nối 2 điểm tương ứng, trên đường tròn giá, đi qua 1 điểm F, từ F, tìm được góc chắn, hay đoạn chắn của mỗi cặp 2 phần tử đối hợp, có thể tìm 2 phần tử có góc min, và góc max =90° của liên hệ đối hợp đã cho.

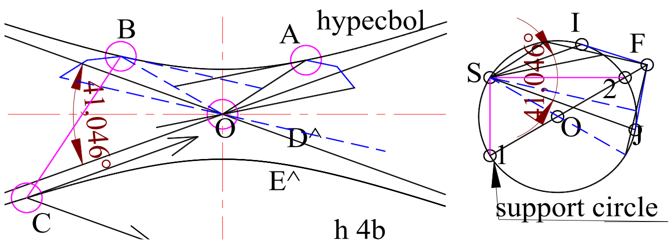
4.3. Tìm góc định dạng của conic. để nghiên cứu chùm conic, tác giả đã chứng minh được rằng mỗi conic nói chung, có thể thực hiện 1 biến đổi giao đối cực vuông góc, trong đó, đường thẳng vô tận biến thành 1 đ.tròn ci.v2. Mỗi conic tương ứng 1 đường thẳng… Đường parabol tương ứng đường thẳng tiếp xúc ci.v2, hypecbol có góc 2 tiệm cận = fi, thì tương ứng đường thẳng cắt ci.v2 theo 1 góc nội tiếp = fi. Elip thì tương ứng với 1 đường thẳng, mà dây cung đi qua điểm đối cực (trong đ.tròn ci.v2) và // đường thẳng, có góc nội tiếp là góc nhỏ nhất trong các góc của các dây cung.

4.4. Áp dụng các kết quả trên, 1 hypecbol Hình 4b, ở mỗi điểm A, B, có 1 tiếp tuyến và 1 đường kính, biểu diễn 2 cặp đường kính liên hợp. Đưa 2 cặp đường kính liên hợp của 1 hypecbol Hình 4b, đó lên đường tròn giá, ta được điểm Phờ rê giê F ở ngoài đường tròn giá, cho 2 tia kép, có ∠ISJ=41,046° là góc min của các cặp đường kính liên hiệp, đó là góc 2 tiệm cận của hypecbol.

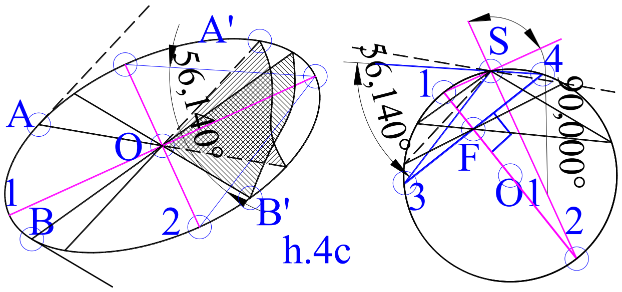
Các cặp đường kính liên hợp ở D, E của 1 elip trên Hình 4c, chuyển lên đường tròn giá, tìm được điểm Phờ rê giê F, ở trong đường tròn giá. Vẽ được: đường kính 1 F O 2, cho góc 2 trục ∠1-S-2 =90°, dây cung ngắn nhất 3-F-4, cho góc min =56,149° = góc đồng dạng của elip… Trên trục hypecbol, và trục elip, ta tìm được đỉnh conic. Trên Hình 4d, Với 2 dây cung có vị trí bất kì AB,CD; nếu 2 đường thẳng K 1, L 2 chứa 2 đường kính, là // nhau, thì tâm conic ở xa vô tận, conic này là parabol, tìm được trục, đỉnh trên hình vẽ.



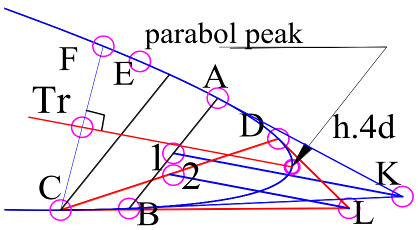
Hình 4a. đt q1, đt q2 cắt chùm conic theo hai hàng điểm đối hợp…



Hình 4b. Tìm trục, góc tiệm cận…



Hình 4c. Tìm trục, góc định dạng elip



Hình 4d. parabol-trục-đỉnh

5. Phép thấu xạ

5.1. Biến đổi cộng tuyến. Một liên hệ 1-1 giữa các điểm, đường thẳng của 2 trường điểm đường thẳng (nói ngắn là trường điểm) sẽ gọi là cộng tuyến nếu nó bảo tồn, sự thẳng hàng, của bất cứ 3 điểm nào.

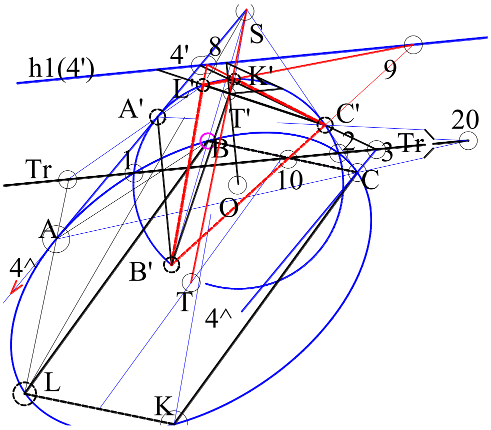
Do đó: biến đổi cộng tuyến, biến 1 đường thẳng thành 1 đường thẳng. Một hàng điểm thành 1 hàng điểm xạ ảnh, một chùm đường thẳng thành 1 một chùm đường thẳng xạ ảnh. Tức là các phép cộng tuyến, bảo tồn tỉ số kép của 4 điểm thẳng hàng, hay 4 đường thẳng đồng qui…

5.2. Phép thấu xạ là 1 trường hợp của biến đổi cộng tuyến

Lập phép thấu xạ trong mặt phẳng, Hình 5a, cho conic co.nr đi qua 5 điểm ABDEC. Theo cách của 2 chùm đường thẳng xạ ảnh, hay định lí Pascal, Tìm 2 tiếp tuyến ở A,C. Hai tiếp tuyến cắt nhau ở S. Lấy 2 điểm A',C' trên 2 đường thẳng SA,SC với SA'=SC' và vẽ đường tiếp xúc ở A',C', ta có biến đổi thấu xạ tâm S, biến co.nr thành đường tròn ci.r(A',C'…). Nối đường thẳng S-B, lấy 1 điểm cắt đường tròn ci.r ở B'. Ta có 2 điểm trên trục thấu xạ: điểm cắt 10 của BC và B'C', điểm cắt 20 của AC và A'-C', đường thẳng nối 10-20, là trục thấu xạ Tr, cắt đường tròn ci.r ở 1-2, là 2 điểm chung của ci.r và co.nr.

Biến đổi thấu xạ có tính chất: Phép cộng tuyến trong mặt phẳng pi, là biến đổi điểm, đường thẳng và conic trường này (không mang dấu phẩy): thành điểm và conic của trường điểm kia (ví dụ mang dấu phẩy), trên cùng 1 giá (là mặt phẳng chứa cả 2 trường điểm đó): biến 1 hàng điểm này, thành 1 hàng điểm kia, sao cho: mỗi cặp 2 điểm tương ứng A-A', B-B', C-C'… nằm trên những đường thẳng SAA', SBB' SCC'… cùng đi qua 1 điểm cố định S trong pi, gọi là tâm thấu xạ, giao điểm các cặp 2 đường thẳng tương ứng: AB x A' B', AC x A' C', BC x B' C'… là những điểm thẳng hàng, cùng thuộc 1 đường thẳng gọi là trục thấu xạ, Hai điểm tương ứng bất kì trên co.nr, và ci.r phải có 2 tiếp tuyến cắt nhau ở 1 điểm ϵ Tr. …

Về kí hiệu: Biến đổi thấu xạ là biến đổi cộng tuyến của 2 trường điểm cùng giá. ví dụ 1 trường điểm chứa conic không tròn co.nr - kí hiệu các điểm không có dấu phẩy treo; và 1 trường điểm chứa đường tròn do ci.r do co.nr biến thành (kí hiệu điểm của ci.r có dấu phẩy treo. Mỗi điểm ϵ trục thấu xạ Tr, là điểm trùng nhau của hai kí hiệu, ví dụ điểm cắt nhau của co.nr và ci.r trên trục thấu xạ là 1=1'…nhưng để đơn giản chỉ viết là "1"…



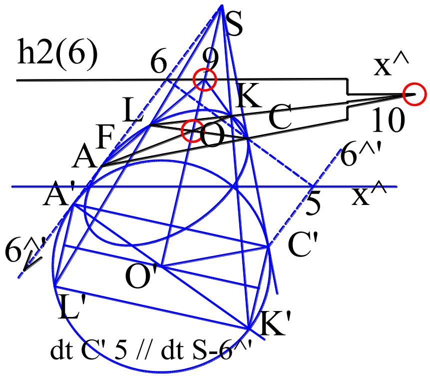
Hình 5a. Biến đổi thấu xạ: co.nr (ngoại tiếp bình) ⬄ ci.r (ngoại tiếp tứ giác)

5.3. Điểm vô tận và đường thẳng vô tận trong thấu xạ

1/Điểm vô tận, đường thẳng vô tận của mặt phẳng xạ ảnh: trong 1 trường điểm và đường thẳng, giao điểm các đường thẳng song song nhau là 1 điểm vô tận. Mỗi đường thẳng trong 1 trường điểm, chỉ có 1 điểm xa vô tận. Trong mặt phẳng giá chung của phép thấu xạ, chỉ có 1 đường thẳng xa vô tận. Nhưng đường thẳng vô tận đó, nếu của trường điểm chứa co.nr, ta kí hiệu là $\mathbf{v_n}$ (4^), trên Hình 5a, đường thẳng $\mathbf{v_n}$ chứa điểm vô tận 4^. Điểm 4^ của đường thẳng S-A-4^, có ảnh là điểm hữu hạn 4' trong trường điểm ci.r và ảnh đường thẳng $\mathbf{v_n}$ là 1 đường thẳng hữu hạn h1(4') // đường thẳng Tr. Tìm điểm 4': qua C ϵ co.nr, vẽ đường thẳng C-4^, cắt đường thẳng tr ở điểm 3, nối đường thẳng 3-C', cắt S-A-4^ ở điểm 4'…

Đường thẳng vô tận trường điểm co.nr, có ảnh là đường thẳng hữu hạn h1(4') với đường tròn ci.r. Điểm đối cực của h1(4') với ci.r là T', ảnh T' là tâm T của co.nr. Hình bình hành BCKL nội tiếp co.nr, có ảnh là tứ giác B'C'K' L' nội tiếp ci.r, với 3 điểm chéo 8-9-và T', mà 8,9 thì ϵ đường thẳng h1(4')…

2/Đường thẳng vô tận v'(6^') của trường điểm ci.r: trên Hình 5b, khi biến đổi thấu xạ co.nr thành ci.r, đường thẳng vô tận v'(6^) của ci.r có tạo ảnh là 1 đường thẳng hữu hạn trong trường co.nr …: điểm xa vô tận 6^' trên đường thẳng S A' 6^' của trường điểm ci.r, có tạo ảnh là điểm hữu hạn 6, tạo ảnh đường thẳng v'(6^') là đường thẳng hữu hạn h2(6) // Tr. Tìm điểm 6: vẽ đường thẳng C' 6^', cắt tr ở 5. Nối đường thẳng 5-C, cắt đường thẳng S-A'-6^' ở điểm 6. Hình chữ nhật A'C'K' L' nội tiếp đường tròn ci.r, thì tương ứng 1 tứ giác ACKL nội tiếp co.nr với 3 điểm chéo là 9-10-O trên Hình 5b. …



Hình 5b. thấu xạ: tứ giác nội tiếp co.nr ⬄ chữ nhật nội tiếp ci.r

5.4. Một số bài toán có thể dùng thấu xạ

1/Vẽ conic từ 5 điểm ABCDE xác định co.nr. Cần lập 1 biến đổi thấu xạ biến co.nr thành đường tròn ci.r, bao gồm tâm S và trục thấu xạ tr, tìm tâm T của co.nr. Từ đó có thể tìm từ 1 điểm M' ϵ ci.r, thì có 1 điểm M ϵ co.nr. Cho điểm M' chạy n vị trí ϵ ci.r, thì có n điểm M, từ đó nối lại, và chỉnh sửa đường gẫy khúc thành đường cong trơn- ta có đường bậc hai liền nét co.nr. Áp dụng tìm, tâm, tìm trục đã nêu trên, ta có 1 conic co.nr với tâm, trục, và đỉnh conic đầy đủ. Từ việc vẽ conic co.nr thành 1 đường bậc hai liền nét, có thể dùng lệnh Autocad tìm chiều dài cung, diện tích hình có đường biên cong là conic…

2/Nhờ thấu xạ giữa co.nr và đường tròn, có thể không vẽ ra conic, vẫn tìm được: tiếp tuyến của co.nr qua 1 điểm ϵ co.nr; Vẽ tiếp tuyến qua 1 điểm không ϵ co.nr co.nr, vẽ giao điểm 1 đường thẳng đã cho với co.nr…

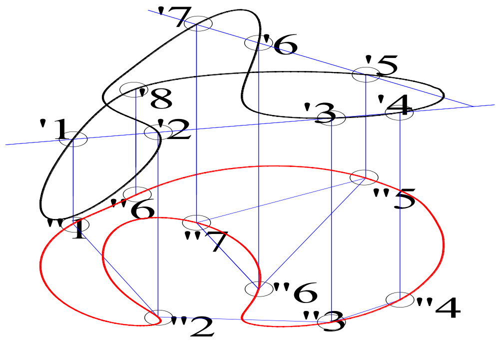
6. Kết luận

1/Một conic bất kì, không suy biến cho bởi tương đương 5 điểm đồng phẳng,.. có thể dùng định lí 2 chùm đường thẳng xạ ảnh trong 1 mặt phẳng, hay định lí pascal, hay biến đổi thấu xạ biến co.nr thành đường tròn và nhờ máy tính điện tử vẽ co.nr thành 1 đường bậc hai liền nét, tìm tâm, trục, góc định dạng của conic, và từ đó có thể viết phương trình chính tắc của conic (mà không phải biến đổi theo giải tích) để làm những tính toán khác… ví dụ: vẽ conic thành đường cong liền nét, tìm tâm, tìm trục, tìm tiếp tuyến, giao điểm …

2/Ảnh 2 đường thẳng xa vô tận trong 2 trường điểm của biến đổi thấu xạ, lần lượt là 2 đường thẳng hữu hạn, // với trục thấu xạ. Mỗi bình hành nội tiếp co.nr, hay chữ nhật nội tiếp ci.r, có hình tương ứng là tứ giác nội tiếp ci.r hay co.nr; có 2 điểm chéo, ϵ đường thẳng hữu hạn tương ứng trên, và điểm chéo thứ 3, là điểm đối cực của đường thẳng hữu hạn với ci.r, hay với co.nr. Từ đó cũng suy ra trường hợp 1 hình thang nội tiếp co.nr, hay nội tiếp ci.r…

3/Vấn đề sử dụng các phép vẽ theo hình học để vẽ conic, sẽ tìm ra các kết quả về mặt bậc hai, chùm đường bậc hai phẳng, chùm đường bậc hai trên mặt bậc hai, nhanh hơn là dùng cách chứng minh theo đại số, giải tích. Vì thế việc vẽ conic theo hình học ở đây, là rất cần thiết. Cho nên bài này, là 1 chuẩn bị dùng cho các nghiên cứu khác, như vẽ đường cong ghềnh bậc 4 nói dưới đây.

4/Các việc vẽ đường cong, mặt cong, theo cách dựng hình có 3 việc như đã nói ở trên. Để tìm ra mỗi kết quả mới, việc thứ nhất là phải có ý tưởng, chỉ ra các phép dựng hình từ dữ liệu đã cho, dẫn đến việc dựng ra kết quả. Việc vẽ conic nêu trên, là những ý tưởng và cách dựng hình đã được chỉ ra phần lớn, tác giả chỉ bổ xung và viết lập trình autolisp. Còn khi tìm 1 kết quả hoàn toàn mới: như chứng minh và vẽ ra 1 đường trùng phương ghềnh trên Hình 6: lấy 8 điểm (1-2-…7-8) thế nào, trong không gian 3D, các phép dựng là gì để tìm ra 1 điểm và vô số điểm thuộc 1 đường trùng phương ghềnh bậc 4 từ 8 điểm đã cho. Đường bậc 4 này, chính là giao của 2 mặt bậc hai. Nhưng ta dựng ra nó, từ 8 điểm, mà không phải cho hai mặt bậc hai đó. Theo mục 2.7 ở trên, việc vẽ conic trong bài này, Còn cần viết lập trình autolisp cho máy tính, xin được trình bày vào một bài khác.



Hình 6. 2 hình chiếu đường ghềnh bậc 4, từ 8 điểm 1,2,3,4,5,6,7,8 (hình chiếu đứng:'1-'2-'3…hc băng "1-"2-"3….)

Tài liệu tham khảo

[1] N.C. Toàn. (1980). Hình học xạ ảnh. Nhà xuất bản Đại học Sư phạm Hà Nội.

[2] J.W. Young. (1930). Monogaph on projective geometry. Hội Toán học Hoa Kỳ - 1930.

[3] Albrecht Bautelspacher-Ute Resenbaum. (1998). Projective geometry: University Cambridge.

[4]. Lars Kadison, Matthias T. Kromann. (1994). A cour in projective geometry by – Denmarrk.

[5] Jean-Marie Monier. (1995). Tuyển tập hình học – Nhà xuất bản Dunod, Paris - Jean-Marie Monier.