

Numerical method to estimate the transfer function representing the displacement of towed underwater vehicle under the impact of sea waves

Article info

Type of article:

Original research paper

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2024.vn.4.1.11-18>

*Corresponding author:

E-mail address:

npdang@lqdtu.edu.vn

Received: 18/1/2024

Accepted: 30/1/2024

Published: 22/2/2024

Vu Duc Tuan¹, Nguyen Phu Dang^{2*}

¹University Of Transport Technology, Vietnam

²Military Technical Academy, Vietnam

Abstract: The towed underwater vehicle (TUV) is one of the typical objects with the distributed parameters. The transfer function (TF) describing the dynamic processes of this object contains not only higher order functions but also inertial and transcendental components. This causes difficulties when synthesizing the control system for them. The basic synthesis way for such objects is carried out in two steps: first, a model with centralized parameters is established instead of the original object with the distributed parameters, then the synthesis of the controller is performed using well-known methods for linear systems. Therefore, this article will propose and investigate a solution estimating the transfer function of TUV by an approximate model with the required error based on the real interpolation method (RIM), includes main contents: establishing the model of the Towed cable (TC)- Underwater vehicle (UV) system, proposing an estimation algorithm and building a program to automatically estimate the TF, which associates between the displacement at the cable's point attached to the UV with displacement at the cable's point attached to the winches.

Keywords: Towed underwater vehicle (TUV), Real interpolation method (RIM), Transfer function (TF), Object with the distributed parameters, Estimation of transfer function.

Phương pháp số ước lượng hàm truyền biểu diễn độ dịch chuyển của thiết bị ngầm được lai dắt bằng cáp dưới tác động của sóng biển

Thông tin bài viết

Dạng bài viết:

Bài báo nghiên cứu

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2024.vn.4.1.11-18>

*Tác giả liên hệ:

Địa chỉ E-mail:

npdang@qgdtu.edu.vn

Ngày nộp bài: 18/1/2024

Ngày chấp nhận: 30/1/2024

Ngày đăng bài: 22/2/2024

Vũ Đức Tuấn¹, Nguyễn Phú Đăng^{2*}

¹Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, Hà Nội, Việt Nam

²Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội, Việt Nam

Tóm tắt: Thiết bị ngầm được lai dắt bằng cáp (Towed Underwater Vehicle-TUV) là một trong những đối tượng điều khiển có tham số phân bố điển hình. Hàm truyền (Transfer Function- TF) mô tả các quá trình động học của đối tượng này có chứa các hàm bậc cao cả các thành phần quán tính và siêu việt. Điều này gây khó khăn khi tổng hợp hệ thống điều khiển. Cách tổng hợp cơ bản với các đối tượng như vậy thường gồm hai bước: Thứ nhất, một mô hình với các tham số tập trung được thiết lập thay cho đối tượng ban đầu có tham số phân bố; Thứ hai, việc tổng hợp bộ điều khiển được thực hiện bằng các phương pháp kinh điển đã biết đối với hệ thống tuyến tính. Do đó, trong bài viết này một giải pháp số sẽ được ứng dụng để ước lượng TF của TUV bằng mô hình gần đúng với sai số yêu cầu dựa trên phương pháp nội suy thực (Real Interpolation Method- RIM). Nghiên cứu này có các nội dung chính: thiết lập mô hình hệ thống Cáp kéo (Towed Cable- TC)- Phương tiện dưới nước (Underwater Vehicle - UV), xây dựng thuật toán và chương trình ước lượng TF biểu diễn mối liên hệ giữa độ dịch chuyển ở cuối cáp gắn với UV và độ dịch chuyển tại điểm gắn vào tời.

Từ khóa: Phương tiện kéo dưới nước (TUV), Phương pháp nội suy thực (RIM), Hàm truyền (TF), Đối tượng có tham số phân bố (ODP), Ước lượng hàm chuyển.

1. MỞ ĐẦU

Hiện nay, TUV đang được sử dụng rộng rãi trong thăm dò, khảo sát đại dương nhờ những ưu điểm vượt trội như thời gian làm việc không hạn chế, độ ổn định hoạt động cao,... Cấu trúc chung của hệ thống Ship - TC - UV được dẫn ra trên Hình 1. Trong đó, TC là phần tử có tham số phân bố mà các quá trình động học của nó được mô tả bằng các phương trình phức tạp như phương trình vi phân, phương trình tích phân, phương trình vi - tích phân và các dạng khác. Do đó, TF mô tả hệ thống TC- UV sẽ có dạng chung [1-7]:

$$W_{dt}(s) = f(s, e^{\frac{A(s)}{B(s)}}, \sqrt{s}, \sqrt{a_1 s + 1},$$

$$\cos(s), \sin(s), \text{sh}(s), \text{ch}(s), \dots) \quad (1)$$

Sự phức tạp của TF (1) gây ra những khó khăn đáng kể khi tổng hợp các hệ thống điều khiển. Cách tổng hợp thông thường là thay thế biểu thức (1) bằng một phân thức hữu tỷ biểu diễn khâu tuyến tính ổn định. Việc này tuy làm mất đi các tính chất đặc trưng của hệ thống có tham số phân bố và tăng sai số tính toán, nhưng nó cho phép áp dụng các phương pháp đã biết để tổng hợp các hệ tuyến tính bất biến theo thời gian.

Một số nghiên cứu đã thực hiện các giải pháp xấp xỉ hàm truyền (1) [8-13]. Nghiên cứu [8,9] sử dụng các đa thức Chebyshev $T_k(s)$ để xác định mô

hình xấp xỉ dạng: $W_{dt}(s) \approx \sum_{k=0}^m p_k T_k(s) / \sum_{k=0}^n q_k T_k(s)$.

Nghiên cứu [10] sử dụng các đa thức Bessel. Tuy nhiên, các phương pháp này chỉ được sử dụng trong các trường hợp cụ thể. Các công bố [11,12] dùng chuỗi hội tụ và xấp xỉ Pade. Tuy nhiên, việc nhận được các chuỗi hội tụ của hàm (1) gặp nhiều khó khăn, không phải lúc nào cũng thực hiện được do sự phức tạp của hàm (1). Cách này cũng đồng thời làm tăng sai số ước lượng. Việc ước lượng theo phương pháp tần số cũng có nhược điểm, liên quan đến quá trình chuyển hàm gốc (1) theo biến phức $W_{dt}(j\omega)$ thành dạng của biến thực:

$W_{dt}(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ vì hàm $W_{dt}(j\omega)$ có các giá trị cực trị ở tần số nhất định [13]. Những hạn chế của các phương pháp trên bao gồm: Dung lượng tính toán lớn; Mô hình xấp xỉ có bậc cao do việc ước lượng được thực hiện cho từng thành phần của hàm (1). Điều này làm tăng sai số tổng thể và gây khó khăn cho việc tổng hợp các bộ điều khiển, đặc biệt là điều khiển thời gian thực; Ngoài ra, các phương pháp này chỉ được sử dụng để ước lượng các hàm đặc biệt. Do đó, nghiên cứu này sẽ thiết lập một thủ tục ước lượng dựa trên RIM để nhận được mô hình gần đúng từ mô hình gốc (1) [14]. Giải pháp này cho phép thao tác với các số thực, khắc phục những hạn chế của các phương pháp ước lượng trước đó. Nó làm giảm dung lượng tính toán và cho phép nhận được một mô hình xấp xỉ có bậc tùy ý mà không gặp bất kỳ khó khăn nào. Ngoài ra, thuật toán được đề xuất có thể được hiện thực hóa dễ dàng trên máy tính. Nghiên cứu này sẽ giải quyết các vấn đề chính: Mô hình hóa hệ thống TC-UV; Xây dựng thuật toán và chương trình ước lượng trên máy tính, đánh giá kết quả với các cấu trúc của mô hình xấp xỉ khác nhau.

2. NỘI DUNG CHÍNH

2.1. Mô hình hóa hệ TC-UV

Để mô hình hóa cấu trúc hệ thống TC - UV dưới dạng TF, biểu diễn mối liên hệ giữa độ dịch chuyển của đầu cáp gắn với UV $x(L, s)$ và lực kéo

tại đầu cáp gắn vào tời $T(0, s)$ với độ dịch chuyển tại đầu cáp gắn vào tời $x(0, s)$, chúng ta sẽ xem xét một đoạn cáp có trục trùng với trục Oz khi tác động lực kéo T, z là chiều dài của cáp không tải, y và $x = y - z$ là chiều dài của cáp và biến dạng của nó với tải tương ứng (Hình 2). Các lực tác động đến hệ thống TC – UV bao gồm: Trọng lượng của hệ thống trong nước; lực đàn hồi; lực quán tính xảy ra khi tăng tốc hệ thống (TC - UV) và khối lượng dính ướt của nước cũng như lực ma sát giữa cáp với nước và lực ma sát của cáp là các lực chính tác động lên hệ TC - UV.

Trong các điều kiện cụ thể [5,10], dao động dọc của tiết diện cáp được biểu diễn bởi:

$$\begin{cases} T = E_T \cdot F \cdot \partial x / \partial z + \lambda \cdot F \cdot \partial^2 x / \partial z \cdot \partial t \\ \partial T / \partial z = m \cdot \partial^2 z / \partial t^2 + \beta \cdot \partial x / \partial t \end{cases} \quad (2)$$

Trong đó E_T , - mô đun đàn hồi của cáp, đối với cáp kim loại: $E_T = 1,65 \cdot 10^5$ Mpa; F - Diện tích mặt cắt ngang của cáp bằng tổng thiết diện các lõi; λ - hệ số ma sát của cáp; m- khối lượng trên mỗi đơn vị dài của cáp (kg); β - hệ số ma sát giữa cáp với nước (s^{-1}). Sau khi thay thế $\lambda = E_T \cdot F \cdot \tau_{mp}$ cho phương trình đầu tiên của (2), chúng ta có:

$$T = E_T \cdot F \cdot (\partial x / \partial z + \tau_{mp} \cdot \partial^2 x / \partial z \cdot \partial t) \quad (3)$$

Thực hiện biến đổi Laplace đối với (2), (3) ta có:

$$\begin{cases} \partial T / \partial z = m \cdot s^2 \cdot x(z, s) + \beta \cdot s \cdot x(z, s) \\ T = E_T \cdot F \cdot (1 + \tau_{mp} \cdot s) \cdot \partial x(z, s) / \partial z \end{cases} \quad (4)$$

Kết quả tính toán trong [5,10] cho thấy TF liên hệ giữa độ dịch chuyển ở đầu cáp gắn vào UV ($x(L, s)$) với độ dịch chuyển tại đầu cáp gắn vào tời ($x(0, s)$) sẽ có dạng:

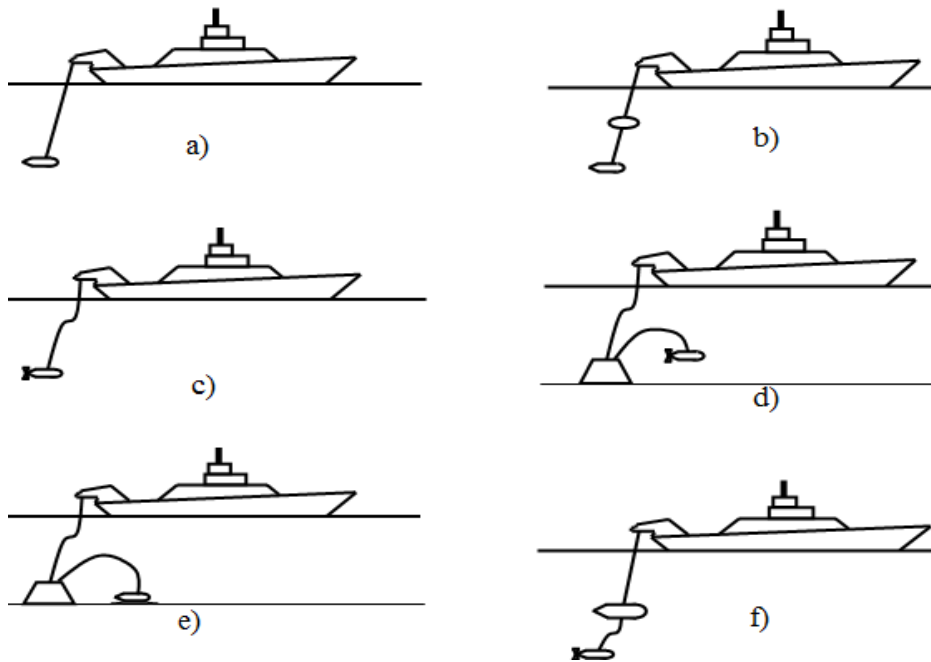
$$W_{dt}(s) = \frac{x(L, s)}{x(0, s)} = \left(\text{ch}(\tau_L \cdot r(s)) + \frac{m_{no} \cdot s^2 + k_{no} \cdot s}{Z_w(s)} \cdot \text{sh}(\tau_L \cdot r(s)) \right)^{-1} \quad (5)$$

trong đó, $\tau_L = L / w$ - thời gian lan truyền sóng trong cáp; $Z_w(s) = b_w \sqrt{(s^2 + v_{mp} \cdot s)(1 + \tau_{mp} \cdot s)}$,

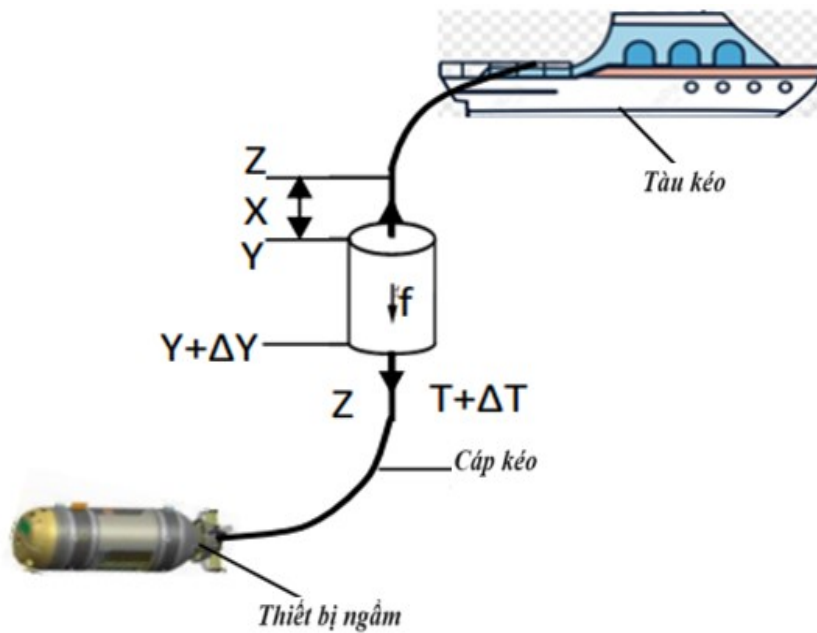
$b_w = m \cdot w$ - trở kháng sóng; τ_{mp} - hằng số thời gian của ma sát trong của cáp; $r(s) = \sqrt{(s^2 + v_{mp} \cdot s) / (1 + \tau_{mp} \cdot s)}$ - hệ số lan truyền dao động; $w = \sqrt{E_T \cdot F / m}$ - Tốc độ truyền sóng trong cáp (m / s); $v_{mp} = \beta / m$ - hệ số kéo tương đối dọc cáp (1 / s); k_{no} - Hệ số cản của nước do chuyển động của thiết bị; m_{no} - Khối lượng thiết bị trong nước. Đối với cáp "KGP-1-20" có đường kính

ngoài 23,4mm; $m = 1,63\text{kg} / \text{m}$; $w = 4020\text{m} / \text{s}$; $\tau_{mp} = 0,01\text{s}$; $\beta = 0,05\text{s}^{-1}$, và TUV với $k_{no} = 1800\text{kg} / \text{s}$; $m_{no} = 5860\text{kg}$, hàm truyền (5) trở thành: (6)

$$W_{dt}(s) = \left(\text{ch}\left(\frac{L}{4020} \cdot \sqrt{\frac{s^2 + 0,0307s}{1 + 0,01s}}\right) + \frac{5860 \cdot s^2 + 1800 \cdot s}{6552,6 \cdot \sqrt{(s^2 + 0,0307s)(1 + 0,01s)}} \cdot \text{sh}\left(\frac{L}{4020} \cdot \sqrt{\frac{s^2 + 0,0307s}{1 + 0,01s}}\right) \right)^{-1}$$



Hình 1. Các loại phương tiện kéo dưới nước (TUV) điển hình



Hình 2. Mô hình khảo sát của đoạn cáp và biến dạng của nó

2.2. Thiết lập thuật toán ước lượng

Cần tìm một phân thức hữu tỷ:

$$W_e(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} \quad (7)$$

với bậc của các đa thức m, n và hệ số $a_i, b_j (i = \overline{1, n}; j = \overline{0, m})$, xấp xỉ với TF ban đầu (6) có sai số cho trước nào đó (Δ).

Các bước của thủ tục ước lượng TF (6) theo RIM bao gồm [14]: Chuyển đổi các hàm $W_e(s), W_{dt}(s)$ về dạng thực $W_e(\delta), W_{dt}(\delta)$; Tính toán các đặc trưng số $\{W_e(\delta_i)\}_\eta, \{W_{dt}(\delta_i)\}_\eta$ của các hàm thực tương ứng. Cuối cùng, thiết lập và giải hệ phương trình [14]:

$$\{W_e(\delta_i)\}_\eta = \{W_{dt}(\delta_i)\}_\eta, \delta_i, i = \overline{1, \eta} \quad (8)$$

Hai tham số phải được xác định để xây dựng hệ phương trình (8) bao gồm: số hệ số yêu cầu: $\eta = m + n + 1$ và khoảng phân bố các nút nội suy $[\delta_1, \delta_\eta]$. Giới hạn dưới thường được chọn: $\delta_1 \geq 0$, còn giới hạn trên được tìm từ điều kiện [14]:

$$W_{dt}(\delta_\eta) = (0.1 \div 0.2) [W_{dt}(0) - W_{dt}(\infty)] + W_{dt}(\infty) \quad (9)$$

Quy tắc phân bố của các điểm nút nội suy $\delta_i, i = \overline{1, \eta}$ có thể được chọn theo luật phân phối đều:

$$\delta_i = i \frac{\delta_\eta}{\eta}, i = \overline{1, \eta - 1} \quad (10)$$

hoặc trùng với các nghiệm của phương trình $T_\eta(x) = 0$:

$$\delta_i = \frac{1 + x_i}{1 - x_i}, a, i = \overline{1, \eta} \quad (11)$$

trong đó: a – Tham số hiệu chỉnh sai số ước lượng và $\{x_i\}_\eta$ là điểm 0 của đa thức Chebyshev bậc nhất bậc η ($T_\eta(x)$), được xác định bởi mối quan hệ [15]:

$$T_0(x) = 1; T_1(x) = x; T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}; \dots; T_{\eta+1}(x) = xT_\eta(x) - \frac{1}{4}T_{\eta-1}(x); x \in [-1, 1] \quad (12)$$

Việc chọn các điểm nút nội suy theo đa thức Chebyshev sẽ làm tăng độ chính xác ước lượng. Giá trị của b_0 có thể nhận được dựa trên phương trình tnh, hoặc theo đặc tính biên độ tần số ($A(\omega) = |W_{dt}(j\omega)|$):

$$b_0 = W_{dt}(0); b_0 = 10^{\frac{20 \cdot \lg(A(\omega)) + 20 \cdot \lg \omega}{20}} \quad (13)$$

2.3. Xác định sai số ước lượng

Việc đánh giá độ chính xác ước lượng hàm truyền theo RIM có thể được thực hiện dựa trên các hàm thực $W_{dt}(\delta)$ và $W_e(\delta)$ [14, 16]:

$$\Delta W = \max_{\delta_i; (m, n); \{\delta_i\}_\eta} |\Delta W(\delta)| = \max_{\delta_i; (m, n); \{\delta_i\}_\eta} |W_{dt}(\delta) - W_e(\delta)|, \delta \in [C, \infty), C \geq 0 \quad (14)$$

Độ chính xác ước lượng (14) sẽ được cải thiện bằng cách lặp theo các giá trị m, n và $\delta_i, i = \overline{1, \eta}$ khác nhau [14]. Trước hết, với giá trị m, n nào đó và bộ điểm nút nhất định, hàm xấp xỉ được coi là lần lặp đầu tiên và được ký hiệu: $(m, n)^{(1)}, \{\delta_i\}_\eta^{(1)}, W_e^{(1)}(\delta), \Delta W^{(1)}(\delta), \Delta W^{(1)}$.

$$\Delta W^{(1)} = \max_{\delta_i; (m, n)^{(1)}; \{\delta_i\}_\eta^{(1)}} |\Delta W^{(1)}(\delta)| = \max_{\delta_i; (m, n)^{(1)}; \{\delta_i\}_\eta^{(1)}} |W_{dt}(\delta) - W_e^{(1)}(\delta)|, \delta \in [C, \infty), C \geq 0 \quad (15)$$

Trong lần lặp tiếp theo, các đại lượng $W_e^{(2)}(\delta), \Delta W^{(2)}(\delta), \Delta W^{(2)}$ được xác định tương ứng với tập các điểm nội suy mới: $\delta_i^{(2)}, i = \overline{1, \eta}$. Các điểm nút nội suy $\{\delta_i^{(n)}\}_\eta$ ở lần lặp thứ n được chọn sao cho giảm dần sai số ước lượng. Một trong số chúng được xác định theo biểu thức [14]:

$$\delta_i^{(n)} = i \frac{\delta_\eta^{(n)}}{\eta}, i = \overline{1, \eta - 1}; \delta_\eta^{(n)} = \delta_\eta^{(n-1)} \pm \frac{1}{n} \delta_\eta^{(n-1)}; n = 2, 3, \dots \quad (16)$$

Phương thức lặp (16) được thực hiện với các tham số cấu trúc khác nhau: $(m, n)^{(2)}, (m, n)^{(3)}, \dots$ cho đến khi sai số ΔW là nhỏ nhất. Sau đó, chúng ta sẽ nhận được mô hình xấp xỉ tối ưu tương ứng $W_e^{on}(s)$. Các tham số m, n thường nhận giá trị nhỏ

($m \leq 3, n \leq 3$) do sự phức tạp của bài toán tổng hợp tiếp theo.

3. KẾT QUẢ, THẢO LUẬN

3.1. Xây dựng chương trình

Từ phân tích trên, thủ tục ước lượng TF (6) sử dụng RIM gồm các bước:

Bước 1. Lựa chọn các giá trị m, n của hàm $W_e(s)$. Xác định b_0 theo (13).

Bước 2. Xác định các điểm nút nội suy $\delta_i, i = \overline{1, \eta}$ theo (10) hoặc (11).

Bước 3. Xác định các đại lượng $\{W_e(\delta_i)\}_\eta, \{W_{dt}(\delta_i)\}_\eta$ theo các điểm nút $\delta_i, i = \overline{1, \eta}$ và hàm thực $W_e(\delta), W_{dt}(\delta)$ đã biết. Thành lập và giải hệ phương trình (8).

Bước 4. Tìm sai số xấp xỉ theo tiêu chuẩn (14).

Bước 5. Lập lại các tính toán của bước 2 hoặc bước 1 để xác định mô hình xấp xỉ có sai số nhỏ nhất (16).

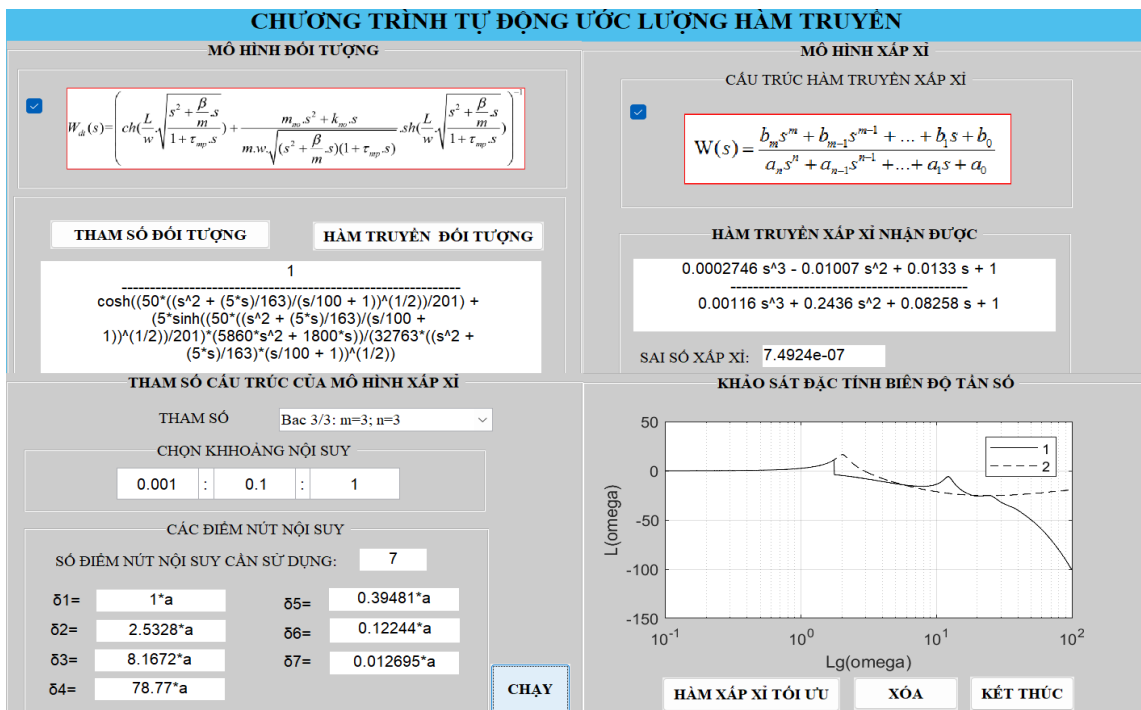
3.2. Kết quả và nhận xét

Để xác minh tính hiệu quả của thủ tục trên đây, một chương trình ước lượng được xây dựng có giao diện như trên Hình 3. Kiểm tra chương

trình được thực hiện với các tham số khác nhau (m, n) của mô hình xấp xỉ (7). Đầu tiên, mô hình gần đúng với sai số nhỏ nhất sẽ được xác định cho mỗi bộ tham số (m, n), sau đó mô hình tối ưu sẽ được chọn từ tất cả các mô hình nhận được. Kết quả ước lượng TF (6) được liệt kê trong bảng 1. TF gần đúng tối ưu đạt được tương ứng với tham số cấu trúc $m=3, n=3$ với sai số ước lượng: $\Delta W^{on} = 7.4924 \cdot 10^{-7}$ tại $a = 0.401$. Các đặc tính biên độ tần số logarit của các mô hình ban đầu và ước lượng được thể hiện trong Hình 4. Khi tăng bậc các đa thức m, n của mô hình xấp xỉ thì sai số ước lượng sẽ giảm dần nhưng không tuyến tính do tốc độ giảm của tử và mẫu thức khác nhau, còn trên đặc tính tần số, vùng tần số mà các mô hình gốc và xấp xỉ gần nhau sẽ được mở rộng.

Từ phân tích các kết quả chỉ ra trong bảng 1 cho thấy giải pháp số ước lượng được đề xuất so với các nghiên cứu [8-12] có những ưu điểm:

- Các phép tính đơn giản và trực quan do chỉ phải thao tác với các số thực.
- Mô hình xấp xỉ có bậc thấp trong khi sai số ước lượng vẫn đảm bảo yêu cầu. Điều này rất quan trọng khi xây dựng các hệ thống điều khiển thời gian thực.



Hình 3. Giao diện chương trình tự động ước lượng hàm truyền

Bảng 1. Kết quả ước lượng hàm truyền (9) với các tham số (m,n) khác nhau

(m,n)	$[\delta_1, \delta_n]$	$W^{on}(s)$	ΔW
(0,1)	[0.133,0.135]	$\frac{1.005}{0.274s+1}$	0.031118
(0,2)	[0.061,0.071]	$\frac{1}{0.2531s^2+0.06925s+1}$	$1.5542 * 10^{-4}$
(0,3)	[0.02,0.03]	$\frac{1}{3.008 * 10^{-4}s^3+0.2526s^2+0.06928s+1}$	$2.8754 * 10^{-4}$
(1,1)	[0.77,0.8]	$\frac{-0.08803s+1}{0.1782s+1}$	0.0260
(1,2)	[0.37,0.41]	$\frac{-0.5256s+1}{0.2354s^2+0.01883s+1}$	$6.1115 * 10^{-4}$
(1,3)	[0.87,0.88]	$\frac{0.06928s+1}{8.786 * 10^{-4}s^3+0.2423s^2+0.04243s+1}$	$2.6518 * 10^{-4}$
(2,2)	$[5.10^{-4}, 7.10^{-4}]$	$\frac{-0.009639s^2+0.009536s+1}{0.2438s^2+0.07882s+1}$	$6.1381 * 10^{-4}$
(2,3)	[0.001,0.1]	$\frac{-0.009616s^2+0.02117s+1}{0.002942s^3+0.2446s^2+0.09045s+1}$	$1.5897 * 10^{-4}$
(3,3)	[0.3,0.5]	$\frac{0.0002958s^3-0.01006s^2+0.008662s+1}{1.831 * 10^{-5}s^3+0.2433s^2+0.07794s+1}$	$7.4924 * 10^{-7}$

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã đề xuất và khảo sát một giải pháp số ước lượng hàm truyền mô tả các hệ phi tuyến phức tạp ứng dụng phương pháp nội suy thực. Thủ tục được đề xuất cho phép lựa chọn cấu trúc bất kỳ của mô hình xấp xỉ, giảm khối lượng tính toán và loại bỏ các hạn chế không khắc phục được khi khảo sát hệ thống trong miền thời gian hoặc tần số. Ngoài ra, nó cũng cho phép giảm sai số xấp xỉ nhờ thủ tục lặp theo điểm nút nội suy và tham số cấu trúc khác nhau. Kết quả của nghiên cứu này có thể được sử dụng khi tổng hợp hệ thống điều khiển ổn định TUV dưới tác động của sóng biển. Những phát triển tiếp theo sẽ tập trung vào việc cải thiện độ chính xác ước lượng sử dụng các luật phân bố điểm nút không đều khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. B. Buckham, M. Nahon, M. Seto, X. Zhao, and C. Lambert. (2003). Dynamics and control of a towed underwater vehicle system, part I: model development. *Ocean Engineering Volume 30, Issue 4, pp. 453-470, 2003* [https://doi.org/10.1016/S0029-8018\(02\)00029-X](https://doi.org/10.1016/S0029-8018(02)00029-X)
- [2]. J. Wu, X. Yang, S. Xu, and X. Han. (2022). Numerical investigation on underwater towed system dynamics using a novel hydrodynamic model. *Ocean Engineering Volume 247, 2022.* <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.110632>
- [3]. X. Yang, J. Wu, and S. Xu. (2022). Dynamic analysis of underwater towed system under undulating motion mode of towed vehicle. *Applied Ocean Research, Volume 121, 2022.* <https://doi.org/10.1016/j.apor.2022.103083>
- [4]. E.Y. Rapoport. (2005). Analysis and synthesis of automatic control systems with distributed parameters. M. Vyssh. School, pp. 292, 2005.
- [5]. G.E. Kuvshinov, and L.A. Naumov. (2006). Control systems for the depth of towed underwater objects: Textbook for universities. Vladivostok: Dalnauka, pp. 312, 2006.

- [6]. G.E. Kuvshinov, and K.V. Chupina. (2007). The vertical sway transfer function of the ship. Proceedings of the 7th International Scientific and Practical Conference "Problems of Transport of the Far East, Vladivostok, October 3-5, 2007. Vladivostok: Far Eastern Branch of Russia. acad. transport., 2007. pp. 142-143.
- [7]. G.E. Kuvshinov. (2009). Modeling the lurch of a ship under the influence of irregular sea waves. Problems of transport of the Far East, pp. 14-16, 2009.
- [8]. M.A. Abutheraa, and D. Lester. (2007). Computable function representations using effective Chebyshev polynomial. World academy of science, Engineering and Technology, pp. 103-109, 2007.
- [9]. M.A. Darani, and M. Nasiri. (2013). A fractional type of the Chebyshev polynomials for approximation of solution of linear fractional differential equations. Computational Methods for Differential Equations, pp 96-107 2013.
- [10]. G.E. Kuvshinov. (2008). The influence of sea waves on the towed underwater vehicle. Vladivostok: Dalnauka, pp. 215, 2008.
- [11]. M.T. Thai. (2017). Applying Pade Approximation Model in Optimal Control Problem for a Distributed Parameter System with Time Delay. International Journal of Computing and Optimization, Vol. 4, no. 1, pp. 19-30, 2017.
<https://doi.org/10.12988/ijco.2017.61227>
- [12]. W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery. (2007). Section 5.12 Padé Approximants. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing 3rd edition, 2007. New York: Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-88068-8.
- [13]. I.M. Pershin. (2002). Synthesis of systems with distributed parameters. Pyatigorsk, pp. 212, 2002.
- [14]. V.I. Goncharov. (2002). Synthesis of electromechanical executive systems of industrial robots. Tomsk: TPU Publishing House, C. 100, 2002.
- [15]. B.P. Demidovich. (2008). Numerical methods of analysis. E.Z. Shuvalova. 4th ed., revised. St. Petersburg: Lan, pp. 400, 2008.
- [16]. N.Q. Dung. (2017). An effective approach of approximation of fractional order system using real interpolation method," Journal of Advanced Engineering and Computation (JAEC), Vol. 1, Issue 1, pp. 39-47, 2017.
<http://dx.doi.org/10.25073/jaec.201711.48>