



Article info

Type of article:

Original research paper

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2026.vn.6.7.17-39>

***Corresponding author:**

Email address:

quocth@huce.edu.vn

Received: 11/07/2026

Received in Revised Form:

10/08/2026

Accepted: 21/09/2026

Free Vibration Analysis of Doubly-Curved Sandwich Shallow Shells with Piezoelectric Face Sheets and a Porous FGM Core

Nguyen Van Long, Tran Huu Quoc*

Faculty of Civil and Industrial Construction, Hanoi University of Civil Engineering, No. 55 Giai Phong Street, Bach Mai Ward, Hanoi

Abstract: This paper presents a free vibration analysis of doubly-curved sandwich shallow shells consisting of a functionally graded material (FGM) core made of two phases—ceramic and metal—with internal porosities, sandwiched between two piezoelectric (PZT-4) face sheets. The effective properties of the core vary through the thickness according to a power-law distribution, combined with three porosity distribution patterns (even, uneven, and porosity-free). The displacement field is described using first-order shear deformation theory (FSDT), while the electric potential is assumed to vary linearly through the thickness of each piezoelectric layer. The governing equations are derived from Hamilton's principle and solved using the pb2-Ritz method with polynomial shape functions that automatically satisfy general mechanical boundary conditions. Two electrical circuit conditions—closed-circuit and open-circuit—are considered simultaneously. The reliability of the proposed model is verified through convergence studies and comparisons with previously published results for FGM piezoelectric plates, doubly-curved FGM shells, and porous plates, showing good agreement. The effects of the porosity coefficient, porosity distribution pattern, volume fraction index, curvature (shell type), boundary conditions, and piezoelectric-layer-to-total-thickness ratio on the natural frequencies, as well as the piezoelectric stiffening effect, are investigated and discussed in detail.

Keywords: Doubly-curved shallow shell; Piezoelectric material; Porous FGM; Free vibration; First-order shear deformation theory (FSDT); pb2-Ritz method.



Thông tin bài viết
Dạng bài viết:
Bài báo nghiên cứu

DOI:
<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2026.vn.6.7.17-39>

*Tác giả liên hệ:
Địa chỉ Email:
quocth@huce.edu.vn

Ngày nộp bài: 11/07/2026
Ngày nộp bài sửa: 10/08/2026
Ngày chấp nhận: 21/09/2026

Phân tích dao động tự do của vỏ sandwich thoải hai độ cong có bề mặt là vật liệu áp điện, lớp lõi là vật liệu FGM có vi bọt rỗng

Nguyễn Văn Long, Trần Hữu Quốc*

Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 đường Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội

Tóm tắt: Bài báo trình bày phân tích dao động tự do của vỏ thoải hai độ cong dạng sandwich gồm lớp lõi bằng vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) hai pha: gốm và kim loại, có vi bọt rỗng và hai lớp bề mặt bằng vật liệu áp điện (PZT-4). Tính chất hiệu dụng của lõi biến thiên qua chiều dày theo quy luật lũy thừa kết hợp với ba kiểu phân bố lỗ rỗng (đều, không đều và không rỗng). Trường chuyển vị được mô tả theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), thế điện được giả thiết biến thiên tuyến tính qua chiều dày mỗi lớp áp điện; hệ phương trình chủ đạo được thiết lập từ nguyên lý Hamilton và phương pháp pb2-Ritz với hàm dạng đa thức tự động thỏa mãn điều kiện biên cơ học tổng quát. Hai chế độ mạch điện: mạch đóng và mạch mở, được xét đồng thời. Độ tin cậy của mô hình được kiểm chứng qua khảo sát hội tụ và so sánh với các kết quả đã công bố cho tấm áp điện FGM, vỏ FGM hai độ cong và tấm xốp, với sai số nhỏ. Ảnh hưởng của hệ số độ rỗng, kiểu phân bố lỗ rỗng, chỉ số tỉ phần thể tích, độ cong (loại vỏ), điều kiện biên và tỉ số chiều dày lớp áp điện đến tần số dao động cũng như hiệu ứng cứng hóa áp điện được khảo sát và thảo luận chi tiết.

Từ khóa: Vỏ thoải hai độ cong; Vật liệu áp điện; FGM có vi bọt rỗng; Dao động tự do; Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT); Phương pháp pb2-Ritz.

1. Mở đầu

Vật liệu cơ tính biến thiên (functionally graded material - FGM) là nhóm vật liệu composite thể hệ mới, trong đó thành phần và do đó các tính chất cơ - lý biến đổi trơn tru, liên tục theo một hoặc nhiều phương, cho phép loại bỏ hiện tượng tập trung ứng suất và bong tách lớp thường gặp ở composite nhiều lớp truyền thống [1, 2]. Nhờ kết hợp đồng thời tính chịu nhiệt của gốm và độ dẻo dai của kim loại, FGM đã được ứng dụng rộng rãi trong hàng không - vũ trụ, năng lượng, cơ khí chính xác và xây dựng [3, 4]. Khi được tích hợp thêm các lớp vật liệu áp điện (piezoelectric) đóng vai trò cảm biến và cơ cấu chấp hành, kết cấu FGM trở thành

kết cấu “thông minh” có khả năng tự giám sát và điều khiển dao động, biến dạng cũng như hình dạng [5, 6]. Trong số các dạng kết cấu, vỏ thoải hai độ cong (doubly curved shallow shell) được sử dụng phổ biến làm mái che, thân vỏ thiết bị bay và panel cong nhờ khả năng chịu lực và độ cứng vượt trội so với tấm phẳng cùng khối lượng [7, 8]. Vì vậy, việc phân tích chính xác đặc trưng dao động tự do của vỏ thoải hai độ cong sandwich áp điện - FGM có ý nghĩa quan trọng cả về khoa học và thực tiễn kỹ thuật.

Để mô tả ứng xử cơ học của tấm và vỏ FGM, nhiều lý thuyết biến dạng đã được phát triển. Lý thuyết cổ điển (classical plate/shell theory - CPT)

bỏ qua biến dạng cắt ngang nên chỉ phù hợp với kết cấu rất mỏng và thường đánh giá cao độ cứng của kết cấu [2]. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (first-order shear deformation theory - FSDT) kể tới biến dạng cắt ngang thông qua một hệ số hiệu chỉnh cắt, cho kết quả đủ chính xác đối với tấm - vỏ mỏng đến trung bình với chi phí tính toán thấp và số bậc tự do vừa phải [4, 9]. Các lý thuyết bậc cao (higher-order shear deformation theory - HSDT) và tựa ba chiều (quasi-3D) mô tả trường chuyển vị theo hàm phi tuyến của tọa độ chiều dày, thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt triệt tiêu trên mặt biên mà không cần hệ số hiệu chỉnh, nhưng làm tăng đáng kể khối lượng tính toán [8, 10, 11]. Đối với vỏ thoải, nơi độ cong nhỏ so với kích thước mặt bằng, FSDT kết hợp giả thiết vỏ thoải Donnell/Sanders được xem là sự dung hòa hợp lý giữa độ chính xác và hiệu quả tính toán, và được lựa chọn trong nghiên cứu này. Cụ thể, FSDT được lựa chọn cho bài toán này vì bốn lý do. Thứ nhất, đối tượng khảo sát là vỏ thoải mỏng đến trung bình ($\frac{a}{h} \geq 10$) và có độ cong nhỏ ($\frac{a}{R} \leq 0,5$) – đúng miền áp dụng mà sai lệch của FSDT so với các lý thuyết bậc cao là nhỏ; các kết quả kiểm chứng ở Mục 4.1 cho sai lệch không quá 0,4% so với nghiệm FSDT của Kiani và cộng sự [9] và không quá 3,9% so với nghiệm bậc cao của Demirhan và Taskin [12]. Thứ hai, FSDT chỉ cần năm biến suy rộng, trong khi HSDT và quasi-3D cần từ bảy đến chín biến; với cùng bậc đa thức Ritz, kích thước bài toán trị riêng tăng khoảng 1,4–1,8 lần và chi phí giải trị riêng tăng khoảng 3–6 lần, điều này rất đáng kể khi phải quét đồng thời nhiều tham số cho cả hai chế độ mạch điện. Thứ ba, trường điện thế trong bài toán này được giả thiết biến thiên tuyến tính qua chiều dày mỗi lớp áp điện, tương thích về bậc với trường biến dạng tuyến tính của FSDT; việc nâng bậc riêng trường cơ học mà giữ nguyên bậc trường điện sẽ không làm tăng độ chính xác một cách nhất quán. Thứ tư, ảnh hưởng của ứng suất cắt ngang vẫn được kể đến thông qua hệ số hiệu chỉnh cắt (Mục 3.5), vốn đã được kiểm chứng rộng rãi cho kết cấu FGM và sandwich. Việc mở rộng mô hình sang

HSDT/quasi-3D được nêu như một hướng phát triển ở Mục 5.

Dao động và ổn định của kết cấu tấm - vỏ FGM đã thu hút nhiều nghiên cứu. Loy và cộng sự [4] khảo sát dao động của vỏ trụ FGM; Matsunaga [8] phân tích dao động tự do và ổn định của vỏ thoải FGM bằng lý thuyết bậc cao hai chiều; Chorfi và Houmat [13] cùng Alijani và cộng sự [14] nghiên cứu dao động phi tuyến của vỏ thoải hai độ cong FGM; Tornabene và cộng sự [15] sử dụng phương pháp cầu phương vi phân tổng quát (GDQ) cho vỏ tròn xoay FGM; Kiani và cộng sự [9] đưa ra lời giải giải tích cho vỏ thoải hai độ cong FGM trên nền đàn hồi; các kết quả tổng quan về dao động của vỏ được hệ thống trong [16]. Gần đây, ảnh hưởng của vi bọt rỗng (porosity) - khuyết tật sinh ra trong quá trình chế tạo FGM, được quan tâm đặc biệt vì làm giảm độ cứng và thay đổi tần số dao động của kết cấu. Wattanasakulpong và Ungbhakorn [17], cùng Chen và cộng sự [18] khảo sát dao động của dầm FGM xoắn; Demirhan và Taskin [12], và Ebrahimi và Habibi [19] nghiên cứu tấm xoắn; Wang và Wu [20] khảo sát vỏ trụ FGM xoắn. Về kết cấu áp điện, Askari Farsangi và Saidi [5] đưa ra lời giải kiểu Levy cho tấm FGM mang hai lớp áp điện với cả hai chế độ mạch điện đóng/mở; Barati và cộng sự [21] phân tích dao động điện - cơ của tấm áp điện FGM xoắn; Phung-Van và cộng sự [6] dùng phương pháp đẳng hình học (IGA) cho tấm áp điện FGM. Về phương pháp giải, bên cạnh nghiệm giải tích Navier/Levy [5], phương pháp phần tử hữu hạn và dải hữu hạn [7], GDQ [15] và IGA [6], phương pháp Ritz, đặc biệt là pb-2 Ritz do Liew và Wang [22] đề xuất nổi bật nhờ tự động thỏa mãn điều kiện biên hình học tổng quát và tốc độ hội tụ nhanh; phương pháp này đã được áp dụng thành công cho dầm FGM xoắn [18] và tấm áp điện FGM xoắn có gia cường graphene [23].

Mặc dù vậy, theo hiểu biết của nhóm tác giả, dao động tự do của vỏ thoải hai độ cong dạng sandwich gồm lõi FGM có vi bọt rỗng và hai lớp bề mặt áp điện, được giải bằng phương pháp pb-2 Ritz cho điều kiện biên cơ học tổng quát (tự do - tựa đơn - ngàm) và xét đồng thời cả hai chế độ

mạch điện đóng (closed circuit) và mở (open circuit), vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ. Phần lớn các công trình hiện có tập trung vào tấm phẳng, hoặc chỉ xét một chế độ mạch điện, hoặc bỏ qua đồng thời ảnh hưởng của độ cong, độ rỗng và hiệu ứng cứng hóa áp điện. Đây chính là khoảng trống nghiên cứu mà bài báo hướng tới.

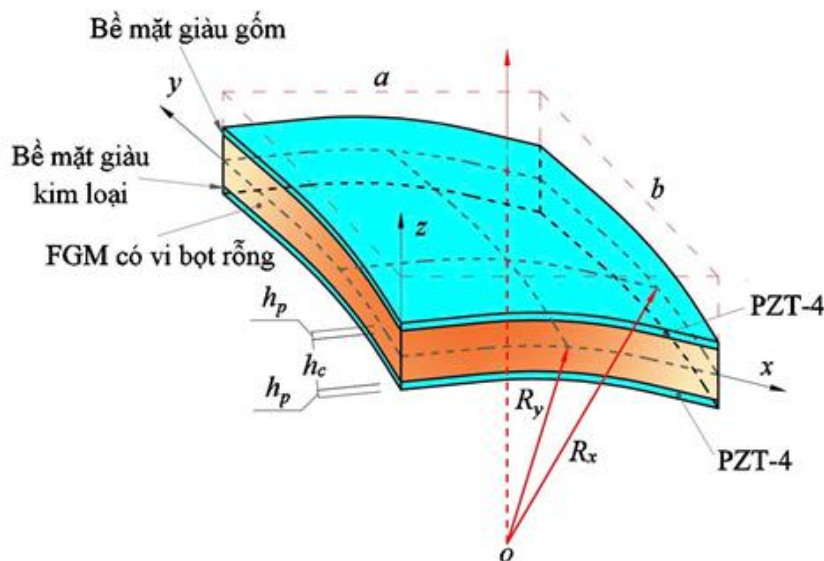
Xuất phát từ khoảng trống trên, bài báo có các đóng góp chính sau: (i) xây dựng mô hình FSDT kết hợp phương pháp pb-2 Ritz cho phân tích dao động tự do của vỏ sandwich thoải hai độ cong áp điện - FGM có vi bọt rỗng (PFG/Pie-SW); (ii) xét đồng thời hai kiểu phân bố lỗ rỗng và hai chế độ mạch điện (đóng và mở), qua đó làm rõ hiệu ứng cứng hóa áp điện; (iii) kiểm chứng độ tin cậy của mô hình với các kết quả đã công bố và khảo sát một cách hệ thống ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hình học, điều kiện biên và điện tới tần số dao động. Phần còn lại của bài báo được tổ chức như sau: Mục 2 trình bày mô hình kết cấu và vật liệu; Mục 3 thiết lập lý thuyết và hệ phương trình

chủ đạo; Mục 4 trình bày kết quả số và thảo luận; Mục 5 nêu các kết luận chính.

2. Mô hình kết cấu và vật liệu

2.1. Cấu hình kết cấu và hệ tọa độ

Hình 1 minh họa cấu hình kết cấu, cấu tạo lớp, hệ tọa độ và quy ước độ cong của vỏ sandwich thoải hai độ cong PFG/Pie-SW được khảo sát trong bài báo. Vỏ thoải hai độ cong có hình chiếu bằng chữ nhật kích thước $a \times b$, tổng chiều dày h , cấu tạo sandwich ba lớp: lõi bằng vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) có vi bọt rỗng dày h_c ở giữa và hai lớp mặt áp điện dày h_p ở phía trên (tp) và phía dưới (bp), $h = h_c + 2h_p$. Kết cấu được quy chiếu trong hệ tọa độ cong trục giao (x, y, z) với mặt $z=0$ là mặt giữa của toàn bộ vỏ; R_x, R_y là bán kính cong chính theo phương x, y (bằng ∞ với tấm phẳng). Phạm vi tích phân qua ba lớp: lõi $z \in [-\frac{h_c}{2}, \frac{h_c}{2}]$, lớp áp điện trên $z \in [\frac{h_c}{2}, \frac{h_c}{2} + h_p]$, lớp áp điện dưới $z \in [-(\frac{h_c}{2} + h_p), -\frac{h_c}{2}]$.



Hình 1. Mô hình vỏ sandwich hai độ cong PFG/Pie-SW

2.2. Mô hình vật liệu lớp lõi FGM có vi bọt rỗng

Lõi giữa là vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) hai pha gồm gốm ở mặt trên và kim loại ở mặt dưới, trong đó có chứa vi bọt rỗng sinh ra từ quá trình chế tạo. Các tính chất hiệu dụng (mô đun đàn hồi kéo (nén) E , khối lượng riêng ρ , hệ số Poisson ν) của lõi biến thiên trơn qua chiều dày theo tỉ phần

thể tích của hai pha và theo mức độ, kiểu phân bố của lỗ rỗng:

$$P(z) = (P_u - P_l) \left(\frac{z}{h_c} + \frac{1}{2} \right)^n + P_l - \frac{\phi}{2} (P_u + P_l) \quad (1)$$

Trong đó P_u và P_l lần lượt là tính chất của pha gốm ở mặt trên lõi ($z = \frac{h_c}{2}$) và pha kim loại ở mặt dưới lõi ($z = -\frac{h_c}{2}$); n là chỉ số tỉ phần thể tích

($n=0$: gốm thuần túy; $n \rightarrow \infty$: kim loại thuần túy); e_0 là hệ số độ rỗng và $\varphi(z)$ là hàm phân bố lỗ rỗng qua chiều dày. Ba kiểu phân bố lỗ rỗng được xét: kiểu đều (Kiểu A), kiểu không đều (Kiểu B, lỗ rỗng tập trung tại mặt giữa lõi và triệt tiêu tại hai mặt lõi) và trường hợp vật liệu hoàn hảo không rỗng (Kiểu C):

$$\varphi(z) = \begin{cases} e_0, & \text{Kiểu A} \\ e_0 \left(1 - \frac{2|z|}{h_c}\right), & \text{Kiểu B} \\ 0, & \text{Kiểu C} \end{cases} \quad (2)$$

2.3. Mô hình vật liệu lớp áp điện

Hai lớp mặt phía trên và phía dưới được làm bằng vật liệu áp điện PZT-4 [5], phân cực theo phương chiều dày. Ứng xử của mỗi lớp áp điện được đặc trưng bởi ma trận độ cứng đàn hồi, các hằng số áp điện, các hằng số điện môi và khối lượng riêng. Quan hệ điện - cơ đầy đủ của lớp áp điện cùng các hằng số rút gọn theo điều kiện ứng suất phẳng được trình bày ở Mục 3.4.

3. Lý thuyết và hệ phương trình chủ đạo

Trên cơ sở cấu hình kết cấu và mô hình vật liệu đã trình bày ở Mục 2, mục này thiết lập trường chuyển vị, trường biến dạng, trường điện thế, phiếm hàm năng lượng và hệ phương trình chủ đạo cho bài toán dao động tự do theo lý thuyết FSDT, và phương pháp pb2-Ritz.

3.1. Trường chuyển vị

Theo FSDT [24], trường chuyển vị của một điểm bất kỳ được biểu diễn qua năm thành phần suy rộng tại mặt giữa gồm ba chuyển vị u_0, v_0, w_0 và hai góc xoay β_x, β_y :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\beta_x(x, y, t); \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\beta_y(x, y, t); \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (3)$$

3.2. Quan hệ biến dạng – chuyển vị

Với giả thiết vỏ thoải, biến dạng được tách thành biến dạng màng $\{\varepsilon^0\}$, độ cong uốn $\{\kappa\}$ và biến dạng cắt ngang $\{\gamma^0\}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w_0}{R_x}; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w_0}{R_y}; \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{xy} &= \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \gamma_{xz}^0 &= \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{u_0}{R_x}; \\ \gamma_{yz}^0 &= \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{v_0}{R_y} \end{aligned} \quad (6)$$

Các số hạng $\frac{w_0}{R_x}, \frac{w_0}{R_y}$ (biến dạng màng) và $-\frac{u_0}{R_x}, -\frac{v_0}{R_y}$ (biến dạng cắt) là đóng góp đặc trưng của độ cong vỏ, triệt tiêu khi $R_x, R_y \rightarrow \infty$.

Biến dạng tại vị trí cao độ z :

$$\{\varepsilon_b\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\}; \quad \{\gamma_s\} = \{\gamma^0\} \quad (7)$$

3.3. Trường điện thế

Điện thế được giả thiết biến thiên tuyến tính qua chiều dày mỗi lớp áp điện $\Phi^{tp} = \left(z - \frac{h}{2}\right) \frac{\phi^{tp}}{h_p}$ và $\Phi^{bp} = -\left(z + \frac{h}{2}\right) \frac{\phi^{bp}}{h_p}$; điện trường theo phương pháp tuyến là hằng số trong mỗi lớp, quy về một biến suy rộng ϕ^{tp}, ϕ^{bp} điện thế tại mặt tự do của lớp trên/dưới):

$$E_z^{tp} = -\frac{\phi^{tp}}{h_p}; \quad E_z^{bp} = -\frac{\phi^{bp}}{h_p} \quad (8)$$

3.4. Quan hệ ứng suất – biến dạng

Với các đặc trưng vật liệu của lõi FGM xoắn (Mục 2.2) và lớp áp điện PZT-4 (Mục 2.3), quan hệ ứng suất - biến dạng - điện của từng lớp được thiết lập như sau:

a. Lớp lõi FGM có vi bọt rỗng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} Q_{11}(z) &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} = Q_{22}(z); \quad Q_{12}(z) = \nu Q_{11}(z) = Q_{21}(z); \\ Q_{44}(z) &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} = Q_{55}(z) = Q_{66}(z). \end{aligned}$$

b. Lớp áp điện

Vật liệu áp điện sử dụng là PZT-4, phân cực theo z , chỉ giữ điện trường E_z . Quan hệ ứng suất

– biến dạng – điện rút gọn theo điều kiện ứng suất phẳng:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \bar{C}_{11}\varepsilon_x + \bar{C}_{12}\varepsilon_y - \bar{e}_{31}E_z; \\ \sigma_y &= \bar{C}_{12}\varepsilon_x + \bar{C}_{11}\varepsilon_y - \bar{e}_{31}E_z;\end{aligned}\quad (10)$$

$$D_z = \bar{e}_{31}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \bar{p}_{33}E_z$$

với các hằng số rút gọn:

$$\begin{aligned}\bar{C}_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}; \quad \bar{C}_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}; \\ \bar{C}_{55} &= C_{55}; \quad \bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{C_{13}}{C_{33}}e_{33};\end{aligned}\quad (11)$$

$$\bar{p}_{33} = p_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}}$$

3.5. Nội lực và các đặc trưng độ cứng, khối lượng

Tích phân ứng suất qua ba lớp cho nội lực màng $\{N\}$, mô men uốn $\{M\}$ và lực cắt $\{Q\}$:

$$\begin{aligned}\{N\} &= [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{\kappa\} - \{N^p\}; \\ \{M\} &= [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{\kappa\} - \{M^p\}; \\ \{Q\} &= [A^s]\{\gamma^0\}\end{aligned}\quad (12)$$

Các phần tử ma trận độ cứng cơ - cơ (lõi dùng $Q_{ij}(z)$, hai lớp áp điện dùng $\bar{C}_{ij}$):

$$\begin{aligned}(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h_c/2}^{h_c/2} (1, z, z^2) Q_{ij}(z) dz \\ &+ \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p} (1, z, z^2) \bar{C}_{ij}(z) dz \\ &+ \int_{-(h_c/2+h_p)}^{-h_c/2} (1, z, z^2) \bar{C}_{ij}(z) dz\end{aligned}\quad (13)$$

$$A_{ij}^s = K_s \left[\int_{-h_c/2}^{h_c/2} Q_{ij}(z) dz + 2h_p \bar{C}_{55} \right]; \quad K_s = \frac{5}{6} \quad (14)$$

Trong công thức (14), K_s là hệ số hiệu chỉnh cắt (shear correction factor) của lý thuyết FSDT. Do FSDT giả thiết mặt cắt phẳng vẫn phẳng sau biến dạng, biến dạng cắt ngang là hằng số theo chiều dày nên ứng suất cắt ngang cũng nhận giá trị hằng trong mỗi lớp. Điều này mâu thuẫn với lời giải đàn hồi ba chiều, trong đó ứng suất cắt ngang có dạng parabol theo chiều dày và triệt tiêu tại hai mặt biên tự do. Hệ số K_s được đưa vào nhằm hiệu chỉnh năng lượng biến dạng cắt của mô hình FSDT về đúng bằng năng lượng biến dạng cắt của lời giải ba chiều. Với tám/vô đồng nhất đẳng hướng, việc

cân bằng hai năng lượng này giữa phân bố parabol và phân bố hằng số cho giá trị $K_s = 5/6$ (Reissner – Mindlin) [24]. Đây cũng là giá trị được sử dụng phổ biến cho kết cấu FGM và sandwich có tỉ số cạnh trên chiều dày từ trung bình đến lớn, và là giá trị mà các tài liệu dùng để kiểm chứng trong bài báo [5, 9, 12] đã áp dụng; vì vậy $K_s = 5/6$ được dùng thống nhất cho toàn bộ tính toán nhằm bảo đảm điều kiện so sánh như nhau.

Hệ số độ cứng điện - cơ và hệ số điện môi của từng lớp áp điện:

$$A_{pie}^{tp} = \frac{\bar{e}_{31}}{h_p} \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p} dz = \bar{e}_{31}; \quad H_{33}^{tp} = \frac{\bar{p}_{33}}{h_p}; \quad (15)$$

$$B_{pie}^{tp} = \frac{\bar{e}_{31}}{h_p} \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p} z dz = \bar{e}_{31} \frac{h_c + h_p}{2}$$

$$A_{pie}^{bp} = \frac{\bar{e}_{31}}{h_p} \int_{-(h_c/2+h_p)}^{-h_c/2} dz = \bar{e}_{31}; \quad H_{33}^{bp} = \frac{\bar{p}_{33}}{h_p}; \quad (16)$$

$$B_{pie}^{bp} = \frac{\bar{e}_{31}}{h_p} \int_{-(h_c/2+h_p)}^{-h_c/2} z dz = -\bar{e}_{31} \frac{h_c + h_p}{2}$$

Lực màng và mô men do điện gây ra:

$$\begin{aligned}\{N^p\} &= (A_{pie}^{tp} \phi^{tp} + A_{pie}^{bp} \phi^{bp}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \\ \{M^p\} &= (B_{pie}^{tp} \phi^{tp} + B_{pie}^{bp} \phi^{bp}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (17)$$

Các mô men quán tính khối lượng (tích phân qua cả ba lớp, bao gồm khối lượng hai lớp áp điện):

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-(h_c/2+h_p)}^{h_c/2+h_p} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (18)$$

3.6. Phiếm hàm năng lượng và nguyên lý Hamilton

Thế năng biến dạng (bao gồm cả thành phần điện - cơ và điện môi):

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_A \left[\{\varepsilon^0\}^T [A] \{\varepsilon^0\} + 2\{\varepsilon^0\}^T [B] \{\kappa\} \right. \\ &+ \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} + \{\gamma^0\}^T [A^s] \{\gamma^0\} \left. \right] dA \\ &- \int_A \left[\{\varepsilon^0\}^T \{N^p\} + \{\kappa\}^T \{M^p\} \right] dA \\ &- \frac{1}{2} \int_A \left[H_{33}^{tp} (\phi^{tp})^2 + H_{33}^{bp} (\phi^{bp})^2 \right] dA\end{aligned}\quad (19)$$

Động năng:

$$T = \frac{1}{2} \int_A [I_0(\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2) + 2I_1(\dot{u}_0\dot{\beta}_x + \dot{v}_0\dot{\beta}_y) + I_2(\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2)] dA \quad (20)$$

Nguyên lý Hamilton (dao động tự do, không tải ngoài):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (21)$$

3.7. Phương pháp pb2-Ritz và toán tử biến dạng

Đưa về tọa độ không thứ nguyên $\zeta = \frac{2x}{a} - 1$, $\eta = \frac{2y}{b} - 1$ ($\zeta, \eta \in [-1, 1]$), với Jacobian $J_x = 2/a$, $J_y = 2/b$. Mỗi trường suy rộng được xấp xỉ bằng chuỗi hàm dạng pb2:

$$\begin{aligned} u_0 &= N_u^T d_u, \quad v_0 = N_v^T d_v, \quad w_0 = N_w^T d_w \\ \beta_x &= N_{\beta x}^T d_{\beta x}, \quad \beta_y = N_{\beta y}^T d_{\beta y}, \\ \phi^{tp} &= \Phi^{tpT} d_{\phi t}, \quad \phi^{bp} = \Phi^{bpT} d_{\phi b} \end{aligned} \quad (22)$$

Trong đó mỗi vector hàm dạng $[m \times 1]$ có phần tử dạng tách biến:

$$\phi_j(\zeta, \eta) = \zeta^{n_x} \eta^{n_y} (\eta + 1)^{k_1} (\zeta - 1)^{k_2} (\eta - 1)^{k_3} (\zeta + 1)^{k_4} \quad (23)$$

Với (n_x, n_y) sinh theo bộ đa thức hai chiều đầy đủ bậc N ($q = 0..N$, $r = 0..q$: $n_x = q - r$, $n_y = r$, tổng $m = (N+1)(N+2)/2$ hàm) và các số mũ biên $k_1..k_4 \in \{0, 1, 2\}$ ứng với bốn cạnh Tự do (F), Tựa đơn (S), Ngàm (C) - tự động thỏa mãn điều kiện biên hình học mà không cần ràng buộc phụ.

Thay (22) vào (4)–(6), biến dạng tại một điểm được biểu diễn qua các toán tử biến dạng suy rộng tác động lên từng vector hàm dạng. Ký hiệu $U, V, W, \beta_x, \beta_y$ là các vector hàm dạng và $(\cdot)_{,\zeta}, (\cdot)_{,\eta}$ là đạo hàm theo ζ, η . Toán tử biến dạng màng $[3 \times m]$:

$$\begin{aligned} B_m^{(1)} &= \begin{bmatrix} J_x U_{,\zeta}^T \\ 0^T \\ J_y U_{,\eta}^T \end{bmatrix}, \quad B_m^{(2)} = \begin{bmatrix} 0^T \\ J_y V_{,\eta}^T \\ J_x V_{,\zeta}^T \end{bmatrix}, \\ B_m^{(3)} &= \begin{bmatrix} W^T/R_x \\ W^T/R_y \\ 0^T \end{bmatrix}, \quad B_m^{(4)} = B_m^{(5)} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Toán tử độ cong uốn $[3 \times m]$:

$$B_b^{(4)} = \begin{bmatrix} J_x \beta_{x,\zeta}^T \\ 0^T \\ J_y \beta_{x,\eta}^T \end{bmatrix}, \quad B_b^{(5)} = \begin{bmatrix} 0^T \\ J_y \beta_{y,\eta}^T \\ J_x \beta_{y,\zeta}^T \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$B_b^{(1)} = B_b^{(2)} = B_b^{(3)} = 0$$

Toán tử biến dạng cắt ngang $[2 \times m]$:

$$\begin{aligned} B_s^{(1)} &= \begin{bmatrix} -U^T/R_x \\ 0^T \end{bmatrix}, \quad B_s^{(2)} = \begin{bmatrix} 0^T \\ -V^T/R_y \end{bmatrix}, \\ B_s^{(3)} &= \begin{bmatrix} J_x W_{,\zeta}^T \\ J_y W_{,\eta}^T \end{bmatrix}, \quad B_s^{(4)} = \begin{bmatrix} \beta_x^T \\ 0^T \end{bmatrix}, \\ B_s^{(5)} &= \begin{bmatrix} 0^T \\ \beta_y^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

Lưu ý: số hạng $-U^T/R_x$ trong $B_s^{(1)}$ và $-V^T/R_y$ trong $B_s^{(2)}$ là đóng góp độ cong vỏ vào biến dạng cắt ngang - không tồn tại trong mô hình tấm phẳng.

3.8. Các khối ma trận độ cứng và khối lượng

Khối độ cứng cơ – cơ: Với $i, j = 1..5$ (năm trường cơ học), khối $K_{d_i d_j}$ kích thước $[m \times m]$:

$$\begin{aligned} K_{d_i d_j} &= \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_m^{(i)T} [A] B_m^{(j)} + B_m^{(i)T} [B] B_b^{(j)} \\ &\quad + B_b^{(i)T} [B] B_m^{(j)} + B_b^{(i)T} [D] B_b^{(j)} \\ &\quad + B_s^{(i)T} [A_s] B_s^{(j)}] d\zeta d\eta \end{aligned} \quad (27)$$

Vì $B_m^{(4)} = B_m^{(5)} = 0$ và $B_b^{(1)} = B_b^{(2)} = B_b^{(3)} = 0$, công thức (27) tự động triệt tiêu các số hạng không tồn tại; toàn bộ K_{uu} $[5m \times 5m]$ được lắp ráp trong một vòng lặp Gauss duy nhất. Khai triển tường minh theo từng cặp (i, j) , các khối khác không của K_{uu} là:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{ab}{4} \iint [B_m^{(1)T} [A] B_m^{(1)} + B_s^{(1)T} [A_s] B_s^{(1)}] d\zeta d\eta \\ K_{13} &= \frac{ab}{4} \iint [B_m^{(1)T} [A] B_m^{(3)} + B_s^{(1)T} [A_s] B_s^{(3)}] d\zeta d\eta \\ K_{14} &= \frac{ab}{4} \iint [B_m^{(1)T} [B] B_b^{(4)} + B_s^{(1)T} [A_s] B_s^{(4)}] d\zeta d\eta \\ K_{33} &= \frac{ab}{4} \iint [B_m^{(3)T} [A] B_m^{(3)} + B_s^{(3)T} [A_s] B_s^{(3)}] d\zeta d\eta \\ K_{44} &= \frac{ab}{4} \iint [B_b^{(4)T} [D] B_b^{(4)} + B_s^{(4)T} [A_s] B_s^{(4)}] d\zeta d\eta \\ K_{45} &= \frac{ab}{4} \iint [B_b^{(4)T} [D] B_b^{(5)} + B_s^{(4)T} [A_s] B_s^{(5)}] d\zeta d\eta \end{aligned} \quad (28)$$

(Các khối $K_{12}, K_{15}, K_{22}, K_{23}, K_{24}, K_{25}, K_{34}$,

K_{35} , K_{55} có cấu trúc tương tự; K_{12} và K_{34} chỉ có số hạng $[A_s]$ do $B_m^{(1)}$ và $B_b^{(4)}$ không ghép với nhau qua $[A]$ hay $[D]$.

Khối ghép cơ – điện: Với $i=1..5$, khối $[m \times m_t]$ ứng với ϕ^{tp} :

$$K_{d_i, \phi^{tp}} = \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_m^{(i)T} \{^1 A_{pie}^{tp} + B_b^{(i)T} \{^1 B_{pie}^{tp}\} \Phi^{tpT} d\zeta d\eta \quad (29)$$

Khối $K_{d_i, \phi^{bp}}$ ứng với ϕ^{bp} có dạng tương tự, thay $A_{pie}^{tp}, B_{pie}^{tp}$ bằng $A_{pie}^{bp}, B_{pie}^{bp}$. Hai lớp áp điện trên/dưới không ghép trực tiếp với nhau ($K_{\phi^{tp}\phi^{bp}}=0$) vì mô hình tuyến tính điện thế theo chiều dày xử lý từng lớp độc lập.

Khối điện - điện (điện môi).

$$K_{\phi^{tp}\phi^{tp}} = -\frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H_{33}^{tp} \Phi^{tp} \Phi^{tpT} d\zeta d\eta, \quad (30)$$

$$K_{\phi^{bp}\phi^{bp}} = -\frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H_{33}^{bp} \Phi^{bp} \Phi^{bpT} d\zeta d\eta, \quad (30)$$

$$K_{\phi^{tp}\phi^{bp}} = 0.$$

Các khối ma trận khối lượng: Ma trận M_{uu} $[5m \times 5m]$ chỉ gồm bảy khối khác không:

$$M_{d_1 d_1} = ab/4 \iint I_0 U U^T d\zeta d\eta, \quad (31)$$

$$M_{d_2 d_2} = ab/4 \iint I_0 V V^T d\zeta d\eta, \quad (31)$$

$$M_{d_3 d_3} = ab/4 \iint I_0 W W^T d\zeta d\eta$$

$$M_{d_4 d_4} = ab/4 \iint I_2 \beta_x \beta_x^T d\zeta d\eta, \quad (32)$$

$$M_{d_5 d_5} = ab/4 \iint I_2 \beta_y \beta_y^T d\zeta d\eta \quad (32)$$

$$M_{d_1 d_4} = M_{d_4 d_1} = ab/4 \iint I_1 U \beta_x^T d\zeta d\eta, \quad (33)$$

$$M_{d_2 d_5} = M_{d_5 d_2} = ab/4 \iint I_1 V \beta_y^T d\zeta d\eta \quad (33)$$

Các khối còn lại (ví dụ $M_{d_1 d_2}$, $M_{d_1 d_3}$, $M_{d_3 d_4}$, ...) bằng 0; khối lượng gắn với bậc tự do điện bằng 0 ($M_{\phi\phi}=0$) vì điện thế không mang quán tính cơ học.

Cấu trúc ma trận toàn cục: Ghép bảy khối bậc tự do theo thứ tự $[u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y, \phi^{tp}, \phi^{bp}]$:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Cách tổ chức khối cho phép tách riêng K_{uu} , $K_{u\phi}$, $K_{\phi\phi}$ bằng phép trích chỉ số trong MATLAB để xử lý hai điều kiện biên điện.

3.9. Hệ phương trình chủ đạo và bài toán trị riêng

Thay xấp xỉ Ritz vào phiếm hàm Hamilton và áp dụng điều kiện dừng $\partial \Pi / \partial d_i = 0$, ta thu được hệ phương trình dao động tự do:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{q\} = \{0\} \quad (35)$$

Viết tách theo khối cơ học q_u và điện q_ϕ :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_\phi \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

trong đó $K_{\phi\phi}$ (điện môi) âm xác định do số hạng $-H_{33}$; M_{uu} dương xác định; khối lượng gắn với bậc tự do điện bằng 0. Hai điều kiện mạch điện được xử lý như sau.

Mạch đóng (closed circuit): điện cực nối đất, $\phi^{tp} = \phi^{bp} = 0$, loại bỏ hoàn toàn bậc tự do điện:

$$(K_{uu} - \omega^2 M_{uu}) \{q_u\} = \{0\} \quad (37)$$

Mạch mở (open circuit): điện tích tự do $D_z = 0$; từ hàng điện không có quán tính $K_{\phi u} q_u + K_{\phi\phi} q_\phi = 0$ suy ra $q_\phi = -K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u} q_u$; thực hiện khử tĩnh (static condensation):

$$(K_{eff} - \omega^2 M_{uu}) \{q_u\} = \{0\}, \quad (38)$$

$$K_{eff} = K_{uu} - K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K_{\phi u}$$

Ma trận K_{eff} luôn lớn hơn hoặc bằng K_{uu} theo nghĩa xác định dương bổ sung (vì $-K_{\phi\phi}$ dương xác định), nên tần số mạch mở luôn $\geq$ tần số mạch đóng — hiệu ứng cứng hóa áp điện (piezoelectric stiffening). Giải bài toán trị riêng tổng quát (37) hoặc (38) thu được các tần số riêng ω_n và $f_n = \omega_n / 2\pi$.

4. Kết quả số và thảo luận

Trong mục này, độ tin cậy của mô hình và chương trình pb2-Ritz được kiểm chứng thông qua khảo sát hội tụ theo bậc đa thức Ritz và so sánh với ba bộ kết quả đã công bố: tấm áp điện FGM của Askari Farsangi và Saidi [5], vỏ FGM hai độ cong của Kiani và cộng sự [9], và tấm FGM xoắn của Demirhan và Taskin [12]. Trừ khi có ghi chú khác, tất cả các bài toán được giải với điều kiện

mạch điện đóng (closed circuit) và hệ số hiệu chỉnh cắt $K_s=5/6$.

4.1. Hội tụ và kiểm chứng

Trong toàn bộ Mục 4, điều kiện biên cơ học của vỏ được ký hiệu bằng bốn chữ cái ứng với bốn cạnh, lần lượt theo thứ tự $y = 0$, $x = a$, $y = b$ và $x = 0$, trong đó F (free) chỉ cạnh tự do, S (simply supported) chỉ cạnh tựa đơn và C (clamped) chỉ cạnh ngàm. Năm cấu hình biên được sử dụng trong bài báo, sắp xếp theo mức độ ràng buộc tăng dần, gồm: CFFF (công-xôn: một cạnh ngàm, ba cạnh tự do), CCCF (ba cạnh ngàm, một cạnh tự do), SSSS (bốn cạnh tựa đơn), SCSC (hai cạnh ngàm xen kẽ hai cạnh tựa đơn) và CCCC (bốn cạnh ngàm). Trong phương pháp pb2-Ritz, các điều kiện biên này được thỏa mãn tự động thông qua bộ số mũ biên $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1, 2\}$ của hàm biên trong công thức (23), tương ứng: giá trị 0 cho cạnh tự do (F), 1 cho cạnh tựa đơn (S) và 2 cho cạnh ngàm (C).

4.1.1. Khảo sát hội tụ

Để chọn bậc đa thức Ritz phù hợp, tần số dao động cơ bản của kết cấu được tính với bậc đa thức N tăng dần từ 3 đến 12, cho hai điều kiện biên tiêu biểu SSSS và CCCC và cả hai chế độ mạch điện. Kết quả (Bảng 1) cho thấy tần số hội tụ đơn điệu khi N tăng. Với biên SSSS, nghiệm ổn định rất nhanh: từ $N = 7$ trở đi, độ lệch tương đối giữa hai bậc liên tiếp nhỏ hơn 0,001%. Với biên CCCC, do ràng buộc biên chặt hơn nên tốc độ hội tụ chậm hơn rõ rệt: độ lệch giữa hai bậc liên tiếp giảm xuống dưới 0,4% kể từ $N = 8$ và dưới 0,06% tại $N = 12$, trong khi độ lệch giữa $N = 8$ và $N = 12$ chỉ khoảng 0,66%. Do số hàm dạng tăng theo $(N + 1)(N + 2)/2$ nên chi phí tính toán tăng nhanh theo bậc đa thức; cân nhắc giữa độ chính xác và chi phí, bậc $N = 8$ được sử dụng cho toàn bộ các khảo sát tham số ở Mục 4.2, còn các bài toán kiểm chứng ở Mục 4.1.2 – 4.1.4 dùng $N = 10 - 12$ để so sánh với nghiệm giải tích ở mức chính xác cao nhất.

Bảng 1. Hội tụ của tần số cơ bản f_1 (Hz) theo bậc đa thức Ritz N

N	SSSS	SSSS	CCCC	CCCC
	(mạch đóng)	(mạch mở)	(mạch đóng)	(mạch mở)
3	160,2488	161,1768	245,9971	248,0194
4	160,2488	161,2138	236,3639	239,0693
5	160,1810	161,1447	234,8112	237,4997
6	160,1810	161,1449	234,5803	237,4794
7	160,1809	161,1448	233,6860	236,5682
8	160,1809	161,1448	233,4359	236,3221
9	160,1809	161,1448	232,9493	235,8234
10	160,1809	161,1448	232,8463	235,7229
11	160,1809	161,1448	232,0419	234,9039
12	160,1809	161,1448	231,9137	234,7712

4.1.2. Kiểm chứng tấm áp điện FGM

Xét tấm vuông FGM (AL/AL_2O_3) mang hai lớp áp điện PZT-4, cạnh $a=1$ m, được kiểm chứng với lời giải giải tích kiểu Levy theo nghiên cứu [5].

Tần số riêng đầu tiên được tính cho các chỉ số tỉ phần thể tích n , các tỉ số chiều dày và cả hai chế độ mạch điện (đóng và mở). Bảng 2 trình bày tần số cơ bản f_1 (Hz) cho điều kiện biên SSSS với tỉ số

chiều dày $2h/a=0,1$ và tỉ số chiều dày lớp áp điện $h_p/2h=0,1$. Kết quả của chương trình phù hợp tốt

với [5] cho cả hai chế độ mạch điện kháng định tính đúng đắn của phần mô hình áp điện.

Bảng 2. So sánh tần số cơ bản f_1 (Hz) của tấm FGM–PZT-4 ($2h/a=0,1$, $h_p/2h=0,1$).

Điều kiện biên	n	Mạch đóng		Chênh lệch (%)	Mạch mở		Chênh lệch (%)
		Askari [5]	Bài báo		Askari [5]	Bài báo	
SSSS	0	426,662	426,642	0,00	433,747	433,728	0,00
	0,5	369,015	368,993	0,01	377,934	377,912	0,01
	1	339,859	339,832	0,01	350,092	350,065	0,01
	2	317,135	317,104	0,01	328,724	328,694	0,01
SCSC	0	616,446	626,699	1,64	626,403	636,678	1,61
	0,5	533,568	542,448	1,64	546,205	555,035	1,59
	1	491,442	499,611	1,64	505,921	514,052	1,58
	2	458,149	465,744	1,63	474,484	482,047	1,57

4.1.3. Kiểm chứng vỏ FGM hai độ cong

Xét vỏ thoải hai độ cong FGM (Al/Al_2O_3) không nền đàn hồi, $b/a=1$, $a/h=10$, được kiểm chứng với lời giải giải tích của Kiani và cộng sự [9] (FSDT kết hợp lý thuyết vỏ thoải Sanders cải tiến). Tần số cơ bản không thứ nguyên $\Omega=\omega(a^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ được tính cho bốn cấu hình (tấm, vỏ trụ, vỏ hai độ cong và vỏ cầu) ứng với các tỉ số độ cong ($a/R_x, a/R_y$) và nhiều giá trị chỉ số tỉ phần thể tích k (trường hợp $k=\infty$ ứng với vỏ kim loại thuần). Vật liệu: $E_m=70$ GPa, $\rho_m=2707$ kg/m³ (kim loại) và $E_c=380$ GPa, $\rho_c=3800$ kg/m³ (gốm), $\nu=0,3$. Bảng 3 cho thấy kết quả của bài báo rất sát với [9] trên toàn bộ dải độ cong và chỉ số k (sai số lớn nhất khoảng 0,4%), phù hợp với việc cả hai đều dựa trên giả thiết vỏ thoải. Bộ số liệu vật liệu trong mục này được lấy đúng theo [9] để bảo đảm điều kiện so sánh giống nhau.

4.1.4. Kiểm chứng tấm FGM xoắn

Để kiểm chứng mô hình vi bọt rỗng của lõi FGM, xét tấm vuông FGM xoắn làm bằng nhôm Al và gốm Al_2O_3 với hai kiểu phân bố lỗ rỗng đều

(even) và không đều (uneven), cùng dạng với mô hình đã trình bày ở Mục 2.2 được so sánh với lời giải Levy kiểu không gian trạng thái (State-Space) dựa trên lý thuyết tấm bốn biến tinh chỉnh của Demirhan và Taskin [12].

Vật liệu (lấy đúng theo [12] để bảo đảm điều kiện so sánh giống nhau): $E_m = 70$ GPa, $\rho_m = 2707$ kg/m³ (Al) và $E_c = 380$ GPa, $\rho_c = 3800$ kg/m³ (Al_2O_3), $\nu = 0,3$. Tần số cơ bản không thứ nguyên $\omega=\omega_h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ được tính cho hai điều kiện biên SSSS và SCSC, với các tỉ số cạnh trên bề dày $a/h = 20$ và 10, hệ số xoắn $e = 0, 0,2$ và 0,4, và chỉ số tỉ phần thể tích $k = 0, 0,5$ và 1.

Bảng 4 cho thấy kết quả FSDT của bài báo phù hợp tốt với Demirhan và Taskin [12]: sai số lớn nhất khoảng 3,9% và có xu hướng tăng khi tấm dày hơn (a/h giảm), hệ số xoắn và chỉ số k tăng, do bài báo dùng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) trong khi [12] dùng lý thuyết bậc cao, chính các tác giả [12] cũng lưu ý nghiệm của họ thiên cao.

Bảng 3. So sánh tần số không thứ nguyên $\Omega = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ của vỏ FGM (AL/AL₂O₃), b/a=1, a/h=10.

Cấu hình	(a/R _x , a/R _y)	Nguồn	k=0	k=0,5	k=1	k=2	k=5	k=10
Tấm	(0, 0)	Kiani [9]	5,769	4,898	4,417	4,012	3,785	3,655
		Bài báo	5,769	4,898	4,417	4,012	3,785	3,655
Vỏ trụ	(0,2, 0)	Kiani [9]	5,833	4,955	4,469	4,055	3,815	3,680
		Bài báo	5,835	4,956	4,470	4,056	3,816	3,681
Vỏ hai độ cong	(0,2, 0,1)	Kiani [9]	5,940	5,052	4,560	4,135	3,878	3,735
		Bài báo	5,941	5,053	4,560	4,135	3,878	3,735
Vỏ cầu	(0,2, 0,2)	Kiani [9]	6,076	5,178	4,677	4,239	3,959	3,805
		Bài báo	6,076	5,178	4,677	4,239	3,959	3,805

Bảng 4. So sánh tần số không thứ nguyên $\varpi = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ của tấm FGM xấp (Al/Al₂O₃) với phân bố lỗ rỗng đều và không đều, theo Demirhan và Taskin [12].

a/h	Điều kiện biên	e ₀	Phân bố	Nguồn	k = 0	k=0,5	k = 1	
20	SSSS	0	Không xấp	Demirhan & Taskin [12]	0,02922	0,02475	0,02230	
				Bài báo	0,02910	0,02466	0,02223	
		0,2	Đều	Demirhan & Taskin [12]	0,03014	0,02463	0,02110	
				Bài báo	0,03002	0,02455	0,02103	
		0,2	Không đều	Demirhan & Taskin [12]	0,03013	0,02542	0,02271	
				Bài báo	0,02997	0,02522	0,02246	
		0,4	Đều	Demirhan & Taskin [12]	0,03148	0,02429	0,01821	
				Bài báo	0,03135	0,02422	0,01817	
		0,4	Không đều	Demirhan & Taskin [12]	0,03129	0,02606	0,02288	
				Bài báo	0,03098	0,02588	0,02268	
		SCSC	0	Không xấp	Demirhan & Taskin [12]	0,04264	0,03614	0,03256
					Bài báo	0,04265	0,03619	0,03264
	0,2		Đều	Demirhan & Taskin [12]	0,04398	0,03598	0,03082	

Bảng 4. (Tiếp)

a/h	Điều kiện biên	e_0	Phân bố	Nguồn	k = 0	k=0,5	k = 1
10	SSSS	0,4	Không đều	Bài báo Demirhan & Taskin	0,04399	0,03604	0,03092
				[12]	0,04395	0,03692	0,03298
				Bài báo Demirhan & Taskin	0,04390	0,03700	0,03297
				[12]	0,04594	0,03550	0,02663
				Bài báo Demirhan & Taskin	0,04595	0,03559	0,02678
				[12]	0,04564	0,03793	0,03372
		0	Không xốp	Bài báo Demirhan & Taskin	0,04536	0,03795	0,03329
				[12]	0,11514	0,09763	0,08796
				Bài báo Demirhan & Taskin	0,11345	0,09633	0,08687
				[12]	0,11875	0,09719	0,08324
		0,2	Không đều	Bài báo Demirhan & Taskin	0,11701	0,09595	0,08231
				[12]	0,11862	0,10013	0,08859
		0,4	Không đều	Bài báo Demirhan & Taskin	0,11674	0,09844	0,08772
				[12]	0,12405	0,09592	0,07194
		0	Không xốp	Bài báo Demirhan & Taskin	0,12223	0,09478	0,07134
				[12]	0,12314	0,10216	0,08991
	SCSC	0,2	Không đều	Bài báo Demirhan & Taskin	0,12057	0,10091	0,08851
				[12]	0,16577	0,14069	0,12698
				Bài báo Demirhan & Taskin	0,16055	0,13695	0,12376
				[12]	0,17097	0,14031	0,12034
		0,4	Không đều	Bài báo Demirhan & Taskin	0,16559	0,13662	0,11772
				[12]	0,17063	0,14272	0,12743
		0	Không xốp	Bài báo Demirhan & Taskin	0,16498	0,13979	0,12487
				[12]	0,17860	0,13869	0,10434
		0,2	Không đều	Bài báo Demirhan & Taskin	0,17297	0,13533	0,10291
				[12]	0,17710	0,14609	0,12984
		0,4	Không đều	Bài báo Demirhan & Taskin	0,17015	0,14309	0,12589

Qua ba bài toán kiểm chứng trên, có thể kết luận rằng mô hình FSDT + pb2-Ritz cùng chương trình tính được xây dựng cho kết quả tin cậy, phù hợp tốt với các lời giải đã công bố cho cả bài toán tấm áp điện, vỏ FGM hai độ cong và tấm xoắn.

4.2. Khảo sát ảnh hưởng của các tham số

Sau khi độ tin cậy của mô hình đã được khẳng định ở Mục 4.1, mục này khảo sát một cách hệ thống ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hình học, điều kiện biên và điện đến tần số dao động tự do của vỏ thoải hai độ cong sandwich áp điện – FGM có vi bọt rỗng. Nếu không nói gì thêm, kết cấu khảo sát là vỏ cầu ($R_x = R_y = 5a$) với lõi FGM hai pha Al_2O_3 (mặt trên) / Al (mặt dưới) dày $h_c = 10$ mm và hai lớp mặt PZT-4 dày $h_p = 1$ mm mỗi lớp, cạnh $a = b = 1$ m, biên tựa đơn bốn cạnh (SSSS), bậc đa thức Ritz $N = 8$ và hệ số hiệu chỉnh cắt $K_s = 5/6$. Tính chất hai pha gồm gốm Al_2O_3 ($E_c = 380$ GPa, $\rho_c = 3960$ kg/m³) và kim loại Al ($E_m = 70$ GPa, $\rho_m = 2702$ kg/m³), hệ số Poisson 0,3; các đặc trưng của PZT-4 gồm $c_{11}=132$ GPa, $c_{12}=71$ GPa, $c_{33}=115$ GPa, $c_{13}=73$ GPa, $c_{55}=26$ GPa, $e_{31}=-4,1$ C m⁻², $e_{33}=14,1$ C m⁻², $e_{15}=10,5$ C m⁻², $\epsilon_{11} = 7,124$ nFm⁻¹, $\epsilon_{33}=5,841$ nFm⁻¹, và $\rho=7500$ kgm⁻³. Tần số cơ bản được biểu diễn dưới dạng không thứ nguyên $\Omega = \omega \cdot a^2 / h \cdot \sqrt{\rho_c / E_c}$. Với mỗi khảo sát, kết quả được trình bày đồng thời cho cả hai chế độ mạch điện: mạch đóng (closed circuit) và mạch mở (open circuit). Cần lưu ý rằng bộ số liệu vật liệu dùng ở Mục 4.2 (gốm Al_2O_3 : $E_c=380$ GPa, $\rho_c=3960$ kg/m³; kim loại Al: $E_m=70$ GPa, $\rho_m=2702$ kg/m³) là bộ số liệu tiêu chuẩn của cặp Al/ Al_2O_3 được dùng thống nhất cho toàn bộ các khảo sát tham số. Trong khi đó, các mục kiểm chứng 4.1.3 và 4.1.4 sử dụng đúng bộ số liệu do tài liệu tham chiếu [9] và [12] công bố ($\rho_c=3800$ kg/m³, $\rho_m=2707$ kg/m³) nhằm bảo đảm điều kiện so sánh hoàn toàn giống nhau. Khác biệt giữa hai bộ số liệu chỉ nằm ở khối lượng riêng (khoảng 4,2% với pha gốm và 0,2% với pha kim loại), không liên quan tới mô đun đàn hồi và hệ số Poisson, nên chỉ làm dịch chuyển đồng đều thang tần số không thứ nguyên

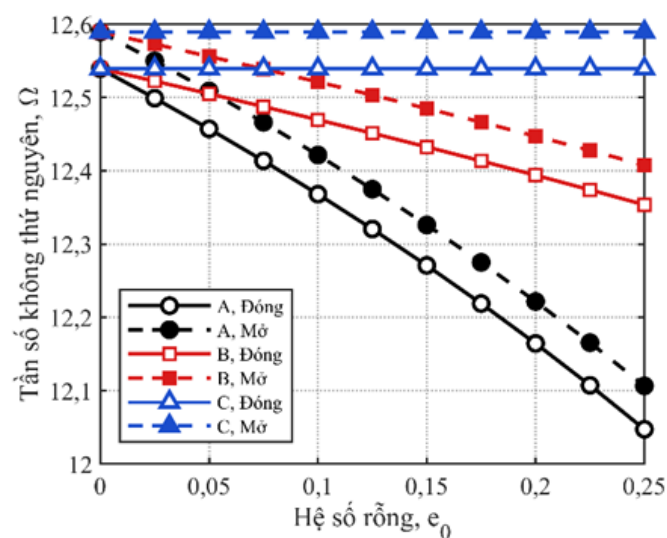
mà không ảnh hưởng tới các quy luật và kết luận định tính rút ra ở Mục 4.2.

4.2.1. Ảnh hưởng của độ rỗng

Ảnh hưởng của hệ số độ rỗng e_0 và của kiểu phân bố lỗ rỗng đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω được khảo sát khi e_0 tăng từ 0 (vật liệu đặc) đến 0,175, với chỉ số tỉ phần thể tích cố định $n = 1$. Ba kiểu phân bố lỗ rỗng được xét: kiểu đều (Kiểu A, $\varphi = e_0$), kiểu không đều (Kiểu B, $\varphi = e_0(1 - 2|z|/h_c)$, lỗ rỗng tập trung tại mặt giữa lõi và triệt tiêu tại hai mặt lõi) và trường hợp vật liệu hoàn hảo không rỗng (Kiểu C, $\varphi = 0$). Với mô hình độ rỗng dạng trừ, để mô-đun đàn hồi tại mặt kim loại luôn dương cần $e_0 < 2E_m/(E_c + E_m) \approx 0,31$ đối với cặp Al_2O_3 , nên e_0 được khảo sát trong khoảng $[0, 0,25]$. Kết quả được cho trong Bảng 5 và biểu diễn trên Hình 2 cho cả hai chế độ mạch điện. Từ Bảng 5 và Hình 2 có thể thấy tần số cơ bản của kiểu A và kiểu B giảm đơn điệu khi e_0 tăng, trong khi kiểu C (không rỗng) cho Ω không đổi theo e_0 và đóng vai trò đường tham chiếu. Khi e_0 tăng, độ rỗng làm giảm mô-đun đàn hồi hiệu dụng của lõi nên độ cứng tổng thể giảm; mặc dù khối lượng cũng giảm, mức suy giảm độ cứng chiếm ưu thế nên tần số giảm. Với mạch đóng, khi e_0 tăng từ 0 đến 0,15, Ω của kiểu A giảm từ 12,539 xuống 12,271 (giảm $\approx 2,14\%$), còn kiểu B chỉ giảm từ 12,539 xuống 12,433 (giảm $\approx 0,85\%$); tại $e_0 = 0,175$, mức giảm của kiểu A đạt khoảng 2,56% ($\Omega \approx 12,219$) so với khoảng 1,00% của kiểu B. So sánh ba kiểu phân bố, kiểu đều (Kiểu A) làm giảm tần số mạnh nhất, kiểu không đều (Kiểu B) giảm chậm hơn đáng kể, còn kiểu hoàn hảo (Kiểu C) không đổi. Nguyên nhân là ở kiểu A, độ rỗng phân bố đều làm giảm mô-đun trên toàn bộ chiều dày lõi, kể cả các thớ xa trục trung hòa vốn đóng góp nhiều nhất vào độ cứng uốn; trong khi ở kiểu B, lỗ rỗng tập trung tại lân cận mặt giữa lõi (gần trục trung hòa) và triệt tiêu tại hai mặt lõi, nên ảnh hưởng tới độ cứng uốn nhỏ hơn nhiều. Do đó, ở cùng một hệ số độ rỗng, kết cấu với lỗ rỗng phân bố không đều (Kiểu B) giữ được độ cứng và tần số cao hơn so với kiểu đều (Kiểu A).

Bảng 5. Ảnh hưởng của hệ số độ rỗng e_0 đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω của vỏ cầu sandwich áp điện – FGM hai pha ($\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$) có vi bột rỗng ($R_x=R_y=5a$, SSSS, $n=1$), cho ba kiểu phân bố A/B/C và hai chế độ mạch điện ($\Omega = \omega \cdot a^2/h \cdot \sqrt{\rho_c/E_c}$).

e_0	A (đóng)	B (đóng)	C (đóng)	A (mở)	B (mở)	C (mở)
0,000	12,5392	12,5392	12,5392	12,5893	12,5893	12,5893
0,050	12,4572	12,5051	12,5392	12,5089	12,5560	12,5893
0,100	12,3680	12,4696	12,5392	12,4214	12,5212	12,5893
0,150	12,2708	12,4325	12,5392	12,3260	12,4850	12,5893
0,175	12,2188	12,4134	12,5392	12,2750	12,4663	12,5893
0,200	12,1644	12,3939	12,5392	12,2215	12,4472	12,5893
0,225	12,1072	12,3739	12,5392	12,1654	12,4277	12,5893
0,250	12,0472	12,3536	12,5392	12,1065	12,4077	12,5893



Hình 2. Ảnh hưởng của hệ số độ rỗng e_0 đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω của vỏ cầu sandwich áp điện – FGM hai pha ($\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$) có vi bột rỗng ($R_x = R_y = 5a$, SSSS, $n=1$) ứng với ba kiểu phân bố lỗ rỗng A/B/C và hai chế độ mạch điện (đóng/mở)

Về ảnh hưởng của chế độ mạch điện, tần số ở mạch mở luôn cao hơn tần số ở mạch đóng đối với cả ba kiểu phân bố và trên toàn dải e_0 (Hình 2), thể hiện hiệu ứng cứng hóa áp điện: ở mạch mở, điều kiện điện tích tự do bằng không sinh ra trường điện phản kháng làm tăng độ cứng hiệu dụng thông qua số hạng khử tĩnh $K_{u\varphi} \cdot K_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot K_{\varphi u}^T$, còn ở mạch đóng điện cực nối đất khử hoàn toàn thế điện. Tại $e_0 = 0$, Ω tăng từ 12,539 (mạch đóng) lên 12,589 (mạch mở), chênh khoảng 0,40%. Độ

chênh này tăng nhẹ khi độ rỗng tăng (ví dụ với kiểu A, chênh khoảng 0,45% tại $e_0 = 0,15$), cho thấy hiệu ứng cứng hóa áp điện càng nổi bật khi lõi càng mềm đi do độ rỗng.

Tóm lại, độ rỗng làm giảm tần số dao động của kết cấu, trong đó kiểu phân bố đều (Kiểu A) gây suy giảm mạnh nhất, kiểu không đều (Kiểu B) ít ảnh hưởng hơn nhờ lỗ rỗng nằm gần trục trung hòa, còn kiểu hoàn hảo (Kiểu C) là giới hạn không rỗng; đồng thời chế độ mạch mở luôn cho tần số

cao hơn mạch đóng do hiệu ứng cứng hóa áp điện. Điều này cho thấy có thể điều chỉnh đặc trưng động lực học của kết cấu thông qua việc kiểm soát mức độ và kiểu phân bố lỗ rỗng cũng như chế độ nối mạch của lớp áp điện.

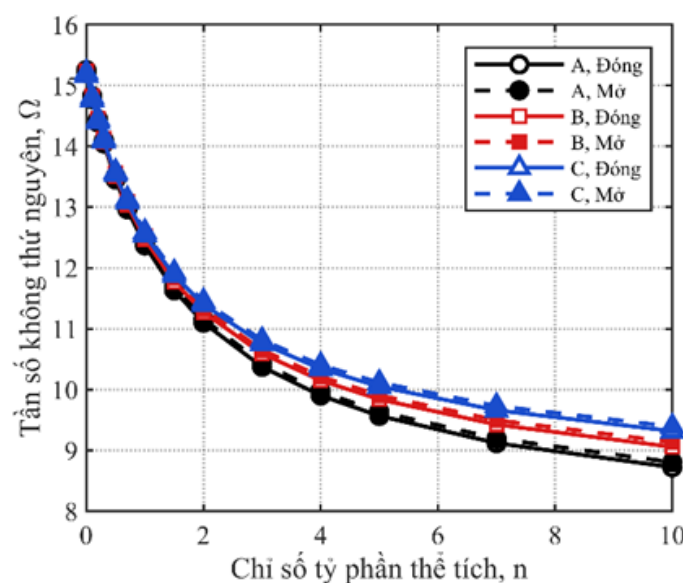
4.2.2. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích n

Ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích n của lõi FGM đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω được khảo sát khi n tăng từ 0 (lõi gốm thuần) đến 10 (lõi thiên về kim loại), với hệ số độ rỗng cố định $e_0 = 0,1$ cho cả ba kiểu phân bố A/B/C. Kết quả được cho trong Bảng 6 và biểu diễn trên Hình 3

cho cả hai chế độ mạch điện. Từ Bảng 6 và Hình 3 có thể thấy tần số cơ bản giảm đơn điệu và khá mạnh khi n tăng, ở cả ba kiểu phân bố và cả hai chế độ mạch điện. Khi n tăng, tỉ phần kim loại (mô-đun thấp) trong lõi tăng lên nên độ cứng uốn hiệu dụng của kết cấu giảm, kéo theo tần số giảm. Mức giảm nhanh ở vùng n nhỏ và thoải dần khi n lớn: với kiểu B ở mạch đóng, Ω giảm từ 15,191 ($n = 0$) xuống 12,470 ($n = 1$, giảm $\approx 17,9\%$) và tiếp tục xuống 9,057 ($n = 10$, giảm tổng cộng $\approx 40,4\%$ so với $n = 0$). Đây là tham số vật liệu có ảnh hưởng mạnh nhất trong các tham số được khảo sát.

Bảng 6. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích n đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω của vỏ cầu sandwich áp điện – FGM có vi bọt rỗng ($R_x = R_y = 5a$, SSSS, $e_0 = 0,1$), cho ba kiểu phân bố A/B/C và hai chế độ mạch điện.

n	A (đóng)	B (đóng)	C (đóng)	A (mở)	B (mở)	C (mở)
0	15,2016	15,1908	15,1635	15,2489	15,2367	15,2081
0,5	13,4527	13,5047	13,5318	13,5035	13,5538	13,5795
1	12,3680	12,4696	12,5392	12,4214	12,5212	12,5893
2	11,0971	11,2683	11,3966	11,1554	11,3246	11,4511
5	9,5668	9,8383	10,0488	9,6366	9,9054	10,1134
10	8,7225	9,0566	9,3169	8,8051	9,1351	9,3920



Hình 3. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ phần thể tích n đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω của vỏ cầu sandwich áp điện – FGM có vi bọt rỗng ($R_x = R_y = 5a$; SSSS; $e_0 = 0,1$) ứng với ba kiểu phân bố lỗ rỗng A/B/C và hai chế độ mạch điện (đóng/mở).

Một điểm đáng chú ý là thứ tự ảnh hưởng của kiểu phân bố lỗ rỗng thay đổi theo n . Ở vùng lõi giàu gốm (n nhỏ, $n \leq 0,2$), độ rỗng làm tăng nhẹ tần số và trật tự là $A \geq B \geq C$, do khi đó việc giảm khối lượng bởi lỗ rỗng lấn át việc giảm độ cứng. Khi n tăng ($n \geq 0,3$), trật tự đảo lại thành $C > B > A$, kiểu hoàn hảo (không rỗng) cho tần số cao nhất, kiểu đều (Kiểu A) thấp nhất, và độ chênh giữa ba kiểu nói rộng dần theo n . Ví dụ tại $n = 10$ (mạch đóng), Ω lần lượt là 9,317 (C), 9,057 (B) và 8,723 (A). Điều này cho thấy ở lõi thiên về kim loại, độ rỗng làm suy giảm độ cứng rõ rệt hơn, đặc biệt với kiểu phân bố đều.

Về chế độ mạch điện, tần số ở mạch mở vẫn luôn cao hơn ở mạch đóng trên toàn dải n do hiệu ứng cứng hóa áp điện. Độ chênh giữa hai mạch tăng dần khi n tăng: với kiểu C, chênh khoảng 0,30% tại $n = 0$ và tăng lên khoảng 0,80% tại $n = 10$. Nguyên nhân là khi n lớn, lõi mềm hơn nên đóng góp độ cứng của hai lớp áp điện (thông qua khử tính ở mạch mở) trở nên tương đối quan trọng

hơn.

Tóm lại, chỉ số tỉ phần thể tích n là tham số vật liệu chi phối mạnh nhất tần số dao động: tăng n làm giảm đáng kể tần số do lõi chuyển dần sang kim loại. Ảnh hưởng của kiểu phân bố lỗ rỗng phụ thuộc vào n , và hiệu ứng cứng hóa áp điện (mạch mở so với mạch đóng) càng rõ khi lõi càng mềm (n lớn).

4.2.3. Ảnh hưởng của độ cong

Ảnh hưởng của độ cong được khảo sát thông qua tham số độ cong a/R (R là bán kính cong chính) cho ba loại vỏ thoải: vỏ trụ ($R_x = R, R_y = \infty$), vỏ cầu ($R_x = R_y = R$) và vỏ yên ngựa ($R_x = R, R_y = -R$); trường hợp $a/R = 0$ ứng với tấm phẳng. Vật liệu được cố định (lõi FGM hai pha Al/Al_2O_3 , $n = 1$, kiểu phân bố B, $e_0 = 0,1$). Do giả thiết vỏ thoải chỉ phù hợp với độ cong nhỏ, a/R được khảo sát tới 0,5 ($R = 2a$). Kết quả được cho trong Bảng 7 và biểu diễn trên Hình 4 cho cả hai chế độ mạch điện.

Bảng 7. Ảnh hưởng của tham số độ cong a/R đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω của vỏ thoải sandwich áp điện – FGM có vi bọt rỗng (SSSS, $n = 1$, kiểu B, $e_0 = 0,1$), cho ba loại vỏ và hai chế độ mạch điện

a/R	Trụ (đóng)	Cầu (đóng)	Yên ngựa (đóng)	Trụ (mở)	Cầu (mở)	Yên ngựa (mở)
0,0	3,6802	3,6802	3,6802	3,7648	3,7648	3,7648
0,1	4,7343	7,0078	3,6727	4,7985	7,0589	3,7572
0,2	6,9988	12,4696	3,6505	7,0498	12,5212	3,7344
0,3	9,6445	18,2083	3,6138	9,6931	18,2721	3,6969
0,4	10,3020	23,9878	3,5632	10,4814	24,0666	3,6451
0,5	10,8742	29,7416	3,4994	11,0437	29,8361	3,5799

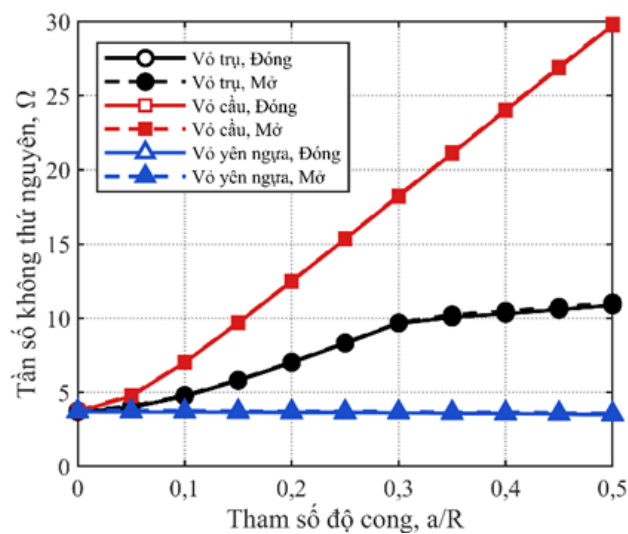
Từ Bảng 7 và Hình 4, tại $a/R = 0$ cả ba loại vỏ trùng nhau và cho tần số của tấm phẳng ($\Omega = 3,680$ ở mạch đóng). Khi độ cong tăng, tần số của vỏ trụ và vỏ cầu tăng rõ rệt do độ cong huy động thành phần độ cứng màng chống lại biến dạng uốn. Mức tăng của vỏ cầu là mạnh nhất vì kết cấu cong theo cả hai phương cùng dấu (độ cong Gauss dương): ở mạch đóng, khi a/R tăng từ 0 đến

0,5, Ω của vỏ cầu tăng từ 3,680 lên 29,742 (khoảng 8,1 lần), còn vỏ trụ tăng từ 3,680 lên 10,874 (khoảng 3,0 lần).

Ngược lại, đối với vỏ yên ngựa (hai độ cong trái dấu, độ cong Gauss âm), tần số gần như không tăng mà còn giảm nhẹ khi a/R tăng: Ω giảm từ 3,680 xuống 3,499 tại $a/R = 0,5$ (giảm khoảng 4,9%). Nguyên nhân là hiệu ứng cứng hóa màng

theo hai phương trái dấu triệt tiêu lẫn nhau, khiến vỏ yên ngựa ứng xử gần như tấm phẳng, thậm chí hơi mềm hơn đối với dạng dao động cơ bản. Như vậy, xét theo độ cứng, thứ tự là vỏ cầu $\gg$ vỏ trụ $>$ tấm phẳng $\approx$ vỏ yên ngựa; độ cong là một trong những tham số hình học chi phối mạnh nhất tần số của vỏ thoải. Về chế độ mạch điện, tần số ở mạch mở vẫn luôn cao hơn ở mạch đóng do hiệu ứng cứng hóa áp điện. Đáng chú ý, độ chênh tương đối giữa hai mạch lớn nhất ở các cấu hình mềm (tấm phẳng và vỏ yên ngựa, khoảng 2,3%) và thu nhỏ

khi độ cong làm kết cấu cứng lên - với vỏ cầu tại $a/R = 0,5$ độ chênh chỉ còn khoảng 0,32%. Điều này một lần nữa khẳng định hiệu ứng cứng hóa áp điện càng nổi bật khi độ cứng cơ học của kết cấu càng thấp. Tóm lại, độ cong chi phối mạnh tần số dao động của vỏ thoải: vỏ cầu cho tần số cao nhất và tăng nhanh theo độ cong, vỏ trụ tăng vừa phải, trong khi vỏ yên ngựa duy trì tần số gần với tấm phẳng. Hiệu ứng cứng hóa áp điện (mạch mở so với mạch đóng) rõ nhất ở các cấu hình có độ cứng thấp.



Hình 4. Ảnh hưởng của tham số độ cong a/R đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω của vỏ thoải sandwich áp điện – FGM có vi bột rỗng (SSSS, $n = 1$, kiểu B, $e_0 = 0,1$) ứng với ba loại vỏ (trụ, cầu, yên ngựa) và hai chế độ mạch điện (đóng/mở).

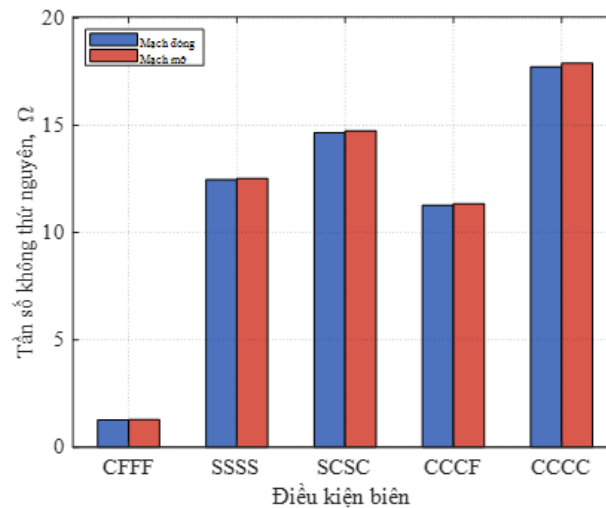
4.2.4. Ảnh hưởng của điều kiện biên

Ảnh hưởng của điều kiện biên cơ học đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω được khảo sát cho năm cấu hình biên tiêu biểu đã được mô tả ở Mục 4.1, sắp xếp theo mức độ ràng buộc tăng dần:

CFFF, CCCF, SSSS, SCSC và CCCC. Kết cấu và vật liệu được cố định (vỏ cầu $R_x = R_y = 5a$, $n = 1$, kiểu B, $e_0 = 0,1$). Kết quả được cho trong Bảng 8 và biểu diễn trên Hình 5 cho cả hai chế độ mạch điện.

Bảng 8. Ảnh hưởng của điều kiện biên đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω của vỏ cầu sandwich áp điện – FGM có vi bột rỗng ($R_x = R_y = 5a$, $n = 1$, kiểu B, $e_0 = 0,1$), cho hai chế độ mạch điện

Điều kiện biên	Mạch đóng	Mạch mở	Độ chênh (%)
CFFF	1,2744	1,2824	0,62
CCCF	11,2746	11,3463	0,64
SSSS	12,4696	12,5212	0,41
SCSC	14,6492	14,7460	0,66
CCCC	17,7164	17,8925	0,99



Hình 5. Ảnh hưởng của điều kiện biên đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω của vỏ cầu sandwich áp điện – FGM có vi bột rỗng ($R_x = R_y = 5a$, $n = 1$, kiểu B, $e_0 = 0,1$) ứng với hai chế độ mạch điện (đóng/mở)

Từ Bảng 8 và Hình 5 có thể thấy tần số cơ bản tăng mạnh khi mức độ ràng buộc ở biên tăng lên, do việc khống chế chuyển vị và góc xoay tại biên làm tăng độ cứng tổng thể của kết cấu. Biên công-xôn CFFF cho tần số thấp nhất ($\Omega = 1,274$ ở mạch đóng) vì ba cạnh tự do khiến kết cấu rất mềm, trong khi biên ngàm hoàn toàn CCCC cho tần số cao nhất ($\Omega = 17,716$), gấp khoảng 13,9 lần so với CFFF. Như vậy điều kiện biên là một trong những yếu tố chi phối mạnh nhất tần số dao động.

Một điểm đáng lưu ý là sự có mặt của một cạnh tự do ảnh hưởng rất lớn: cấu hình CCCF (ba cạnh ngàm, một cạnh tự do) cho $\Omega = 11,275$, thấp hơn cả SSSS ($\Omega = 12,470$) là cấu hình mà cả bốn cạnh đều được đỡ (dù chỉ là tựa đơn). Điều này cho thấy một cạnh tự do làm giảm độ cứng nhiều hơn so với mức tăng độ cứng do thay tựa đơn bằng ngàm ở các cạnh còn lại. Khi thay dần tựa đơn bằng ngàm mà vẫn giữ đủ bốn cạnh được đỡ, tần số tăng đều: SSSS (12,470) < SCSC (14,649) < CCCC (17,716).

Về chế độ mạch điện, tần số ở mạch mở luôn cao hơn ở mạch đóng do hiệu ứng cứng hóa áp điện, với độ chênh nằm trong khoảng 0,4–1,0% tùy điều kiện biên. Độ chênh lớn nhất ở biên ngàm hoàn toàn CCCC (khoảng 0,99%) và nhỏ nhất ở SSSS (khoảng 0,41%); điều này phản ánh mức độ biến dạng (và do đó năng lượng điện - cơ) tích lũy

trong hai lớp áp điện phụ thuộc vào dạng dao động ứng với mỗi điều kiện biên.

Tóm lại, điều kiện biên chi phối mạnh tần số dao động của kết cấu: càng nhiều ràng buộc (đặc biệt là ngàm) thì tần số càng cao, còn sự xuất hiện của cạnh tự do làm giảm tần số rõ rệt. Hiệu ứng cứng hóa áp điện được duy trì với mọi điều kiện biên và rõ nhất ở cấu hình ngàm hoàn toàn.

4.2.5. Ảnh hưởng của tỉ số chiều dày lớp áp điện

Ảnh hưởng của tỉ số chiều dày lớp áp điện h_p/h được khảo sát khi giữ tổng chiều dày h không đổi ($h = 12$ mm) và thay đổi h_p/h từ 0,02 đến 0,30; khi đó chiều dày lõi FGM co lại tương ứng theo $h_c = h - 2h_p$. Các tham số còn lại được cố định (vỏ cầu $R_x = R_y = 5a$, $n = 1$, kiểu B, $e_0 = 0,1$). Kết quả được cho trong Bảng 9; Hình 6 biểu diễn tần số không thứ nguyên Ω theo h_p/h cho hai chế độ mạch điện, còn Hình 7 biểu diễn mức độ cứng hóa áp điện, định nghĩa là $(\Omega_{mo}/\Omega_{đóng} - 1) \times 100\%$.

Từ Bảng 9 và Hình 6, tần số cơ bản giảm đơn điệu khi h_p/h tăng: ở mạch đóng, Ω giảm từ 14,101 ($h_p/h = 0,02$) xuống 8,535 ($h_p/h = 0,30$), tức giảm khoảng 39,5%. Nguyên nhân là khi tăng bề dày lớp áp điện (đồng thời thu hẹp lõi), các thớ ngoài cùng vốn là gốm có mô-đun cao (Al_2O_3) bị thay bằng vật liệu PZT-4 có mô-đun rút gọn thấp

hơn, trong khi khối lượng riêng của PZT-4 (7500 kg/m^3) lại lớn hơn của lõi; cả hai yếu tố này đều làm giảm tần số dao động.

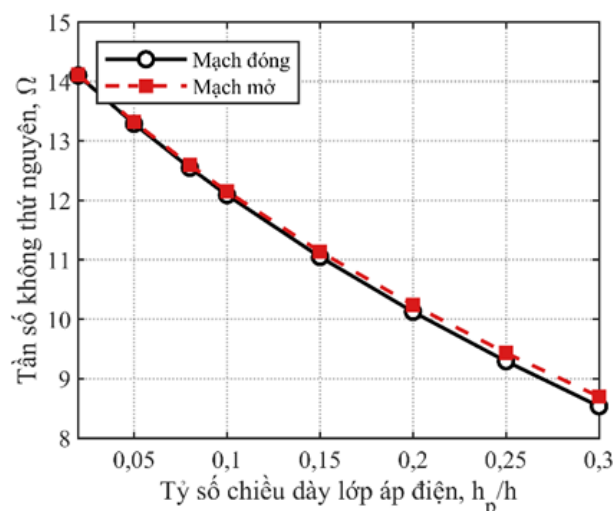
Tuy nhiên, điều quan trọng nhất thể hiện trên Hình 7 là mức độ cứng hóa áp điện tăng mạnh và gần như tuyến tính theo h_p/h : từ khoảng 0,09% khi $h_p/h = 0,02$ lên tới khoảng 1,92% khi $h_p/h = 0,30$, tức tăng hơn 20 lần. Khi lớp áp điện dày hơn, tỉ phần năng lượng biến dạng tích lũy trong hai lớp áp điện tăng lên, làm cho số hạng ghép điện – cơ (và do đó hiệu ứng khử tĩnh ở mạch mở) trở nên đáng kể hơn. Như vậy, tỉ số h_p/h là tham số quyết

định trực tiếp độ lớn của hiệu ứng cứng hóa áp điện, điều mà các khảo sát trước (với $h_p/h = 0,083$ cố định, cho mức cứng hóa khoảng 0,4%) chưa làm nổi bật.

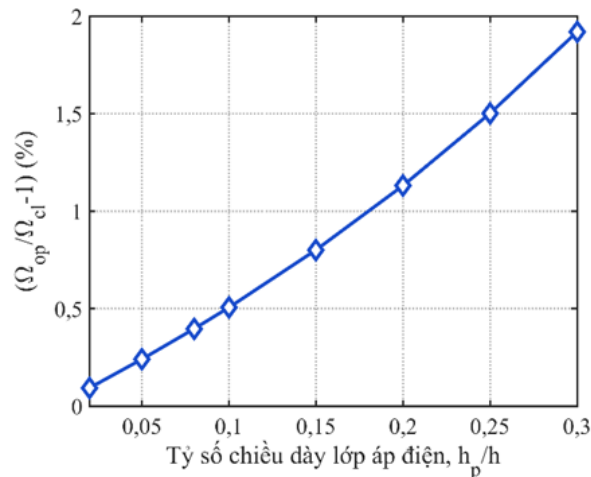
Kết quả này cho thấy một sự đánh đổi có ý nghĩa trong thiết kế: tăng bề dày lớp áp điện làm giảm tần số dao động cơ bản của kết cấu, nhưng lại tăng cường khả năng ghép điện – cơ và do đó khả năng cảm biến/điều khiển chủ động thông qua chế độ nối mạch. Việc lựa chọn h_p/h vì thế cần cân nhắc giữa yêu cầu về độ cứng động lực học và mức độ hiệu quả điều khiển áp điện mong muốn.

Bảng 9. Ảnh hưởng của tỉ số chiều dày lớp áp điện h_p/h đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω và mức độ cứng hóa áp điện của vỏ cầu sandwich áp điện – FGM có vi bọt rỗng ($R_x = R_y = 5a$, $n = 1$, kiểu B, $e_0 = 0,1$).

h_p/h	Mạch đóng	Mạch mở	Cứng hóa (%)
0,02	14,1010	14,1141	0,093
0,05	13,2873	13,3193	0,240
0,08	12,5477	12,5974	0,396
0,10	12,0898	12,1509	0,506
0,15	11,0473	11,1357	0,801
0,20	10,1237	10,2382	1,131
0,25	9,2929	9,4325	1,502
0,30	8,5347	8,6985	1,920



Hình 6. Tần số cơ bản không thứ nguyên Ω theo tỉ số chiều dày lớp áp điện h_p/h (vỏ cầu kiểu B, $R_x = R_y = 5a$, $n = 1$, $e_0 = 0,1$) cho mạch đóng và mạch mở.



Hình 7. Mức độ cứng hóa áp điện $(\Omega_{mo}/\Omega_{đong} - 1) \times 100\%$ theo tỉ số chiều dày lớp áp điện h_p/h (cấu hình như Hình 6).

4.2.6. So sánh mức độ ảnh hưởng của các tham số khảo sát

Các mục 4.2.1 – 4.2.5 đã khảo sát riêng rẽ từng tham số. Để trả lời câu hỏi tham số nào chi phối mạnh nhất tần số dao động của vỏ sandwich.

Bảng 10 tổng hợp biên độ thay đổi của tần số cơ bản không thứ nguyên Ω trên đúng khoảng khảo sát của từng tham số, tính cho chế độ mạch đóng (chế độ mạch mở cho quy luật hoàn toàn tương tự). Cần lưu ý rằng phép so sánh này phụ thuộc vào khoảng khảo sát được chọn; các khoảng ở đây đều được lấy theo phạm vi có ý nghĩa kỹ thuật của từng tham số.

Từ Bảng 10 có thể phân các tham số thành ba nhóm theo mức độ ảnh hưởng. Nhóm thứ nhất – nhóm chi phối – gồm điều kiện biên và độ cong: thay đổi liên kết biên từ CFFF sang CCCC làm tần

số tăng 13,90 lần, còn tăng độ cong của vỏ cầu từ $\frac{a}{R}=0$ lên 0,5 làm tần số tăng 8,08 lần. Đây là hai tham số quyết định bậc độ lớn của tần số, vì chúng tác động trực tiếp tới cơ chế truyền lực của kết cấu: liên kết biên quyết định số ràng buộc động học, còn độ cong quyết định mức độ huy động độ cứng màng chống lại biến dạng uốn. Nhóm thứ hai – nhóm ảnh hưởng trung bình – gồm chỉ số tỉ phần thể tích n (giảm 40,4% khi n tăng từ 0 đến 10) và tỉ số chiều dày lớp áp điện $\frac{h_p}{h}$ (giảm 39,5% khi $\frac{h_p}{h}$ tăng từ 0,02 đến 0,30); cả hai đều làm thay đổi cấu trúc phân bố độ cứng và khối lượng qua chiều dày. Nhóm thứ ba – nhóm tinh chỉnh – gồm hệ số độ rỗng e_0 (giảm 3,92% với kiểu phân bố đều và 1,48% với kiểu không đều) và chế độ nối mạch điện (tăng 0,41% đến 1,92%).

Bảng 10. Tổng hợp mức độ ảnh hưởng của các tham số khảo sát đến tần số cơ bản không thứ nguyên Ω (chế độ mạch đóng)

Tham số	Khoảng khảo sát	Ω nhỏ nhất	Ω lớn nhất	Biên độ thay đổi
Điều kiện biên	CFFF → CCCC	1,2744	17,7164	13,90 lần
Độ cong a/R (vỏ cầu)	0 → 0,5	3,6802	29,7416	8,08 lần
Chỉ số tỉ phần thể tích n (kiểu B)	0 → 10	9,0566	15,1908	– 40,4%
Tỉ số chiều dày lớp áp điện h_p/h	0,02 → 0,30	8,5347	14,1010	– 39,5%
Hệ số độ rỗng e_0 (kiểu A)	0 → 0,25	12,0472	12,5392	– 3,92%
Hệ số độ rỗng e_0 (kiểu B)	0 → 0,25	12,3536	12,5392	– 1,48%
Chế độ mạch điện (đóng → mở)	mọi cấu hình	-	-	+ 0,41% ÷ + 1,92%

Như vậy, ở giai đoạn thiết kế sơ bộ, điều kiện biên và độ cong là hai yếu tố cần được quyết định trước; n và $\frac{h_p}{h}$ là các tham số điều chỉnh chính; còn e_0 và chế độ mạch điện đóng vai trò tinh chỉnh đặc trưng động lực học và khả năng điều khiển chủ động. Riêng $\frac{h_p}{h}$ đáng chú ý ở chỗ tuy chỉ đứng thứ tư về mức ảnh hưởng tới tần số, nhưng lại là tham số quyết định trực tiếp độ lớn của hiệu ứng cứng hóa áp điện (Mục 4.2.5), tức là quyết định hiệu quả cảm biến và điều khiển của kết cấu.

5. Kết luận

Bài báo đã xây dựng mô hình lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất kết hợp phương pháp pb2-Ritz để phân tích dao động tự do của vỏ thoải hai độ cong sandwich áp điện – FGM có vi bọt rỗng, xét đồng thời hai chế độ mạch điện đóng và mở. Từ các kết quả kiểm chứng và khảo sát số, có thể rút ra các kết luận chính sau:

(1) Mô hình FSDT + pb2-Ritz hội tụ nhanh (bậc đa thức $N = 8$ cho các khảo sát tham số và $N = 10 - 12$ cho các bài toán kiểm chứng là đủ) và cho kết quả phù hợp tốt với các nghiệm tham chiếu của Askari & Saidi [5], Kiani và cộng sự [9] và Demirhan & Taskin [12], với sai số nhỏ, khẳng định độ tin cậy của mô hình và chương trình tính.

(2) Độ rỗng làm giảm tần số dao động: kiểu phân bố đều (Kiểu A) gây suy giảm mạnh nhất, kiểu không đều (Kiểu B) ít ảnh hưởng hơn do lỗ rỗng tập trung gần trục trung hòa, còn kiểu không rỗng (Kiểu C) là giới hạn trên. Ở lõi giàu gốm (n nhỏ), thứ tự này có thể đảo lại do độ rỗng làm giảm khối lượng nhiều hơn giảm độ cứng.

(3) Chỉ số tỉ phần thể tích n là tham số vật liệu chi phối mạnh nhất: khi n tăng từ 0 đến 10, tần số cơ bản giảm khoảng 40% do lõi chuyển dần từ gốm sang kim loại.

(4) Độ cong (loại vỏ) ảnh hưởng rất lớn: vỏ cầu cho tần số cao nhất và tăng nhanh theo độ cong (tăng khoảng 8 lần khi a/R đạt 0,5), vỏ trụ tăng vừa phải (khoảng 3 lần), trong khi vỏ yên ngựa duy trì tần số gần với tấm phẳng do hai độ cong trái dấu triệt tiêu hiệu ứng cứng hóa màng.

(5) Điều kiện biên chi phối mạnh tần số: cấu

hình ngàm hoàn toàn (CCCC) cho tần số cao gấp khoảng 13,9 lần cấu hình công-xôn (CFFF); sự xuất hiện của một cạnh tự do làm giảm tần số rõ rệt, thậm chí cấu hình CCCF còn thấp hơn SSSS.

(6) Tần số ở mạch mở luôn cao hơn ở mạch đóng do hiệu ứng cứng hóa áp điện. Mức độ cứng hóa phụ thuộc trực tiếp vào tỉ số chiều dày lớp áp điện h_p/h , tăng gần như tuyến tính từ khoảng 0,09% ($h_p/h = 0,02$) đến khoảng 1,92% ($h_p/h = 0,30$); vì vậy có thể tăng cường khả năng cảm biến/điều khiển áp điện thông qua h_p/h , tuy đi kèm sự suy giảm tần số dao động cơ bản.

(7) Khi so sánh trên toàn bộ khoảng khảo sát (Bảng 10), thứ tự mức độ ảnh hưởng tới tần số cơ bản là: điều kiện biên (13,90 lần) > độ cong (8,08 lần) > chỉ số tỉ phần thể tích n (– 40,4%) $\approx$ tỉ số chiều dày lớp áp điện $\frac{h_p}{h}$ (– 39,5%) > hệ số độ rỗng e_0 (– 3,92%) > chế độ nối mạch điện (+ 0,41% ÷ + 1,92%). Điều kiện biên và độ cong là hai yếu tố quyết định bậc độ lớn của tần số; n và h_p/h là các tham số điều chỉnh chính; còn độ rỗng và chế độ mạch điện dùng để tinh chỉnh.

Các kết quả trên cung cấp cơ sở cho việc thiết kế và điều khiển dao động chủ động của kết cấu vỏ thoải thông minh. Hướng nghiên cứu tiếp theo có thể kể tới nền đàn hồi, phân tích ổn định và đáp ứng động, khảo sát dạng dao động, cũng như tối ưu hóa cấu hình và vị trí lớp áp điện.

Lời cảm ơn:

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2025.127.

Tuyên bố về việc sử dụng AI tạo sinh

Trong quá trình chuẩn bị bài báo này, các tác giả không sử dụng các công cụ AI để hỗ trợ. Các tác giả chịu hoàn toàn trách nhiệm về nội dung của bài báo được công bố.

Tài liệu tham khảo

- [1]. M. Koizumi. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9)
- [2]. J.N. Reddy. (2000). *Analysis of functionally*

- graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3), 663-684. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000110/30\)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8)
- [3]. G.N. Praveen, J.N. Reddy. (1998). Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33), 4457-4476. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00253-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00253-9)
- [4]. C.T. Loy, K.Y. Lam, J.N. Reddy. (1999). Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(3), 309-324. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00054-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00054-X)
- [5]. M.A. Askari Farsangi, A.R. Saidi. (2012). Levy type solution for free vibration analysis of functionally graded rectangular plates with piezoelectric layers. *Smart Materials and Structures*, 21(9), 094017. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/21/9/094017>
- [6]. P. Phung-Van, L. V. Tran, A.J.M. Ferreira, H. Nguyen-Xuan, M. Abdel-Wahab. (2016). Nonlinear transient isogeometric analysis of smart piezoelectric functionally graded material plates based on generalized shear deformation theory under thermo-electro-mechanical loads. *Nonlinear Dynamics*, 87(2), 879-894. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3085-6>
- [7]. W.Y. Li, L.G. Tham, Y.K. Cheung, S.C Fan. (1990). Free vibration analysis of doubly curved shells by spline finite strip method. *Journal of Sound and Vibration*, 140(1), 39-53. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90905-F](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90905-F)
- [8]. H. Matsunaga. (2008). Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 82(4), 499-512. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.01.030>
- [9]. Y. Kiani, A.H. Akbarzadeh, Z.T. Chen, M.R. Eslami. (2012). Static and dynamic analysis of an FGM doubly curved panel resting on the Pasternak-type elastic foundation. *Composite Structures*, 94(8), 2474-2484. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.028>
- [10]. J.N. Reddy. (2003). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2nd Edition. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b12409>
- [11]. A.M. Zenkour. (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration. *International Journal of Solids and Structures*, 42(18-19), 5243-5258. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.016>
- [12]. P.A. Demirhan, V. Taskin. (2019). Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach. *Composites Part B: Engineering*, 160, 661-676. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.020>
- [13]. S.M. Chorf, A. Houmat. (2010). Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form. *Composite Structures*, 92(10), 2573-2581. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.02.001>
- [14]. F. Alijani, M. Amabili, K. Karagiozis, F. Bakhtiari-Nejad. (2011). Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. *Journal of Sound and Vibration*, 330(7), 1432-1454. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.10.003>
- [15]. F. Tornabene, A. Liverani, G. Caligiana. (2011). FGM and laminated doubly curved shells and panels of revolution with a free-form meridian: a 2-D GDQ solution for free vibrations. *International Journal of*

- Mechanical Sciences*, 53(6), 446-470. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.03.007>
- [16]. M. Amabili. (2010). Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. *Cambridge University Press*. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511619694>
- [17]. N. Wattanasakulpong, V. Ungbhakorn. (2014). Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities. *Aerospace Science and Technology*, 32(1), 111-120. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2013.12.002>
- [18]. D. Chen, J. Yang, S. Kitipornchai. (2016). Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 108-109, 14-22. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.01.025>
- [19]. F. Ebrahimi, S. Habibi. (2016). Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate. *Steel and Composite Structures*, 20(1), 205-225. <https://doi.org/10.12989/scs.2016.20.1.205>
- [20]. Y. Wang, D. Wu. (2017). Free vibration of functionally graded porous cylindrical shell using a sinusoidal shear deformation theory. *Aerospace Science and Technology*, 66, 83-91. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.03.003>
- [21]. M.R. Barati, H. Shahverdi, A.M. Zenkour. (2017). Electro-mechanical vibration of smart piezoelectric FG plates with porosities according to a refined four-variable theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 24(12), 987-998. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1196799>
- [22]. K.M. Liew, C.M. Wang. (1993). pb-2 Rayleigh-Ritz method for general plate analysis. *Engineering Structures*, 15(1), 55-60. [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(93\)90017-X](https://doi.org/10.1016/0141-0296(93)90017-X)
- [23]. H.-Q. Tran, V.-T. Vu, M.-T. Tran. (2023). Free vibration analysis of piezoelectric functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement by pb-2 Ritz method. *Composite Structures*, 305, 116535. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116535>
- [24]. R.D. Mindlin. (1951). Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18(1), 31-38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>