



Tạp chí điện tử
Khoa học và Công nghệ Giao thông
Trang website: <https://jstt.vn/index.php/vn>



LQR-Based Balance Recovery and Position Tracking Control for an Autonomous Segway Robot

Article info

Type of article:

Original research paper

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2026.vn.6.5.241-255>

*Corresponding author:

Email address:

binhpb@huce.edu.vn

Received: 03/07/2026

Received in Revised Form:
31/08/2026

Accepted: 14/09/2026

Nguyen Le Trung¹, Pho Bao Binh^{2*}, Pham Dang Minh³, Dao Quy Thinh¹

¹School of Electrical and Electronic Engineering, Hanoi University of Science and Technology, No. 1 Dai Co Viet Street, Bach Mai Ward, Hanoi, Vietnam

²Faculty of Mechanical Engineering, Hanoi University of Civil Engineering, No. 55 Giai Phong Street, Bach Mai Ward, Hanoi, Vietnam

³Viettel Aerospace Institute, Viettel Hoa Lac Building, B1 Lot 1, Hoa Lac Hi-Tech Park, Hanoi, Vietnam

Abstract: This paper presents a balance recovery and position tracking control method for an autonomous Segway-type self-balancing robot using a Linear Quadratic Regulator (LQR). A dynamic model of the two-wheeled self-balancing robot is first developed. The first LQR controller is designed to move the robot body from an initial body tilt angle to the upright equilibrium point. After that, the second LQR controller is applied to stabilize the robot and perform straight-line position tracking. Simulation studies are conducted to evaluate the proposed method. The results demonstrate that the Segway robot can successfully achieve balance recovery, maintain balance, and accurately track the desired position with good stability and control performance.

Keywords: Two-wheeled self-balancing vehicle; LQR controller; inverted pendulum; optimal control; underactuated system.



Điều khiển phục hồi cân bằng và bám vị trí bằng thuật toán LQR cho xe Segway tự hành

Thông tin bài viết

Dạng bài viết:

Bài báo nghiên cứu

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2026.vn.6.5.241-255>

***Tác giả liên hệ:**

Địa chỉ Email:

binhpb@huce.edu.vn

Ngày nộp bài: 03/07/2026

Ngày nộp bài sửa: 31/08/2026

Ngày chấp nhận: 14/09/2026

Nguyễn Lê Trung¹, Phó Bảo Bình^{2*}, Phạm Đăng Minh³, Đào Quý Thịnh¹

¹Trường Điện – Điện tử, Đại học Bách khoa Hà Nội, số 1 Đại Cồ Việt, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam

²Khoa Cơ khí, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 Giải Phóng, phường Bạch Mai, Hà Nội, Việt Nam

³Viện Hàng không Vũ trụ Viettel, Tòa nhà Viettel Hòa Lạc, Lô B1-1, Khu Công nghệ cao Hòa Lạc, Hà Nội, Việt Nam

Tóm tắt: Bài báo trình bày phương pháp điều khiển khôi phục cân bằng và bám vị trí cho xe Segway tự hành sử dụng bộ điều khiển tối ưu phản hồi trạng thái LQR. Trước hết, mô hình động lực học của robot hai bánh tự cân bằng được xây dựng. Bộ LQR thứ nhất được thiết kế nhằm đưa thân xe từ vị trí góc nghiêng ban đầu của thân xe đến vị trí cân bằng thẳng đứng. Sau đó, bộ LQR thứ hai được áp dụng để ổn định hệ và thực hiện bài toán bám vị trí chuyển động thẳng. Các mô phỏng được thực hiện để đánh giá phương pháp đề xuất. Kết quả cho thấy xe Segway có thể thực hiện thành công quá trình khôi phục cân bằng, duy trì trạng thái cân bằng và bám vị trí mong muốn với độ ổn định và chất lượng điều khiển tốt.

Từ khóa: Xe hai bánh tự cân bằng; bộ điều khiển LQR; con lắc ngược; điều khiển tối ưu; hệ thiếu cơ cấu chấp hành.

1. Giới thiệu

Xe Segway, hay còn gọi là xe hai bánh tự cân bằng, là một hệ thống hai bánh được đặt song song với nhau và có thể giữ thăng bằng dựa trên thuật toán điều khiển kết hợp với các tín hiệu đo từ cảm biến góc nghiêng.

Đây là một hệ thống phi tuyến điển hình, thu hút nhiều sự quan tâm trong lĩnh vực điều khiển tự động do đặc tính không ổn định tự nhiên, cấu trúc thiếu cơ cấu chấp hành và khả năng ứng dụng rộng rãi trong các phương tiện di chuyển cá nhân, robot tự hành và kiểm tra hiệu quả của các thuật toán điều khiển khác nhau [1]. Về mặt động lực học, hệ thống này hoạt động dựa trên nguyên lý của con lắc ngược, trong đó thân xe phải luôn được duy trì gần vị trí thẳng đứng trong quá trình

đứng yên hoặc di chuyển [2]. Chỉ cần một sai lệch nhỏ của góc nghiêng cũng có thể làm hệ thống mất cân bằng nếu không có bộ điều khiển phù hợp [3, 4]. Bên cạnh đó, hệ thống có thể phát triển để hoạt động như robot tự hành. Thông qua bộ điều khiển chuyển động phù hợp, xe hai bánh tự cân bằng có thể thực hiện bám vị trí đặt.

Trong quá trình nghiên cứu điều khiển xe hai bánh tự cân bằng, nhiều phương pháp khác nhau đã được đề xuất, bao gồm các bộ điều khiển cổ điển như PID, các phương pháp điều khiển hiện đại như điều khiển tối ưu, điều khiển thích nghi, điều khiển trượt và các phương pháp điều khiển phi tuyến. Trong đó, bộ điều khiển PID có ưu điểm là cấu trúc đơn giản, dễ triển khai và phù hợp với các hệ thống thực nghiệm cơ bản [5-7]. Tuy nhiên,

do xe hai bánh tự cân bằng có động lực học phi tuyến, các biến trạng thái tương tác chặt chẽ với nhau và yêu cầu đáp ứng nhanh, bộ điều khiển PID thường gặp khó khăn trong việc đảm bảo đồng thời độ ổn định, khả năng bám vị trí và chất lượng đáp ứng của hệ thống. Bên cạnh bộ PID, các phương pháp điều khiển dựa trên mạng nơ-ron và điều khiển mờ cũng đã cho thấy hiệu quả cao trong mô phỏng và thực nghiệm [8-12]. Song, các phương pháp này thường đòi hỏi quá trình xây dựng luật điều khiển, huấn luyện hoặc hiệu chỉnh tham số tương đối phức tạp, phụ thuộc nhiều vào dữ liệu, kinh nghiệm thiết kế hoặc số lượng thí nghiệm. Điều này có thể gây khó khăn khi triển khai trên các hệ thống có yêu cầu chi phí thấp hoặc sử dụng nền tảng vi điều khiển với tài nguyên tính toán hạn chế.

Để khắc phục những hạn chế trên, các phương pháp điều khiển hiện đại dựa trên mô hình toán học của hệ thống ngày càng được quan tâm. Trong phạm vi tuyến tính hóa quanh điểm cân bằng, bộ điều khiển toàn phương tuyến tính LQR (Linear Quadratic Regulator) được lựa chọn nhờ khả năng tối ưu hóa hàm chi phí điều khiển, giúp hệ đạt được sự cân bằng giữa tốc độ đáp ứng và mức tiêu hao tín hiệu điều khiển [13]. Bằng cách lựa chọn phù hợp các ma trận trọng số, LQR cho phép điều chỉnh mức độ ưu tiên giữa yêu cầu ổn định góc nghiêng thân xe, điều khiển vị trí, vận tốc chuyển động và giới hạn nỗ lực điều khiển. Vì vậy, LQR được xem là một lựa chọn phù hợp cho các hệ thống có yêu cầu ổn định cao và đáp ứng nhanh như xe hai bánh tự cân bằng.

Trong bài toán điều khiển xe hai bánh tự cân bằng, mô hình động lực học phi tuyến thường được xây dựng trước tiên nhằm mô tả mối quan hệ giữa chuyển động tịnh tiến của xe, góc nghiêng thân xe và mô men tác động lên hai bánh. Tuy nhiên, việc thiết kế trực tiếp bộ điều khiển trên mô hình phi tuyến thường phức tạp. Do đó, mô hình hệ thống thường được tuyến tính hóa quanh điểm làm việc cân bằng thẳng đứng. Trên cơ sở mô hình tuyến tính thu được, bộ điều khiển LQR có thể được thiết kế để đưa các trạng thái của hệ thống

về giá trị mong muốn, đồng thời đảm bảo đáp ứng ổn định và hạn chế dao động.

Bên cạnh yêu cầu giữ thăng bằng, xe hai bánh tự cân bằng còn có thể được mở rộng cho các nhiệm vụ chuyển động tự hành như bám quỹ đạo. Khi đó, hệ thống không chỉ cần duy trì góc nghiêng thân xe gần vị trí cân bằng mà còn phải điều khiển chuyển động của xe theo tín hiệu đặt. Điều này làm tăng độ phức tạp của bài toán điều khiển, bởi bộ điều khiển phải đồng thời xử lý hai mục tiêu: ổn định thân xe và điều khiển vị trí di chuyển. Việc sử dụng LQR trong trường hợp này giúp cải thiện chất lượng đáp ứng nhờ khả năng xét đồng thời nhiều biến trạng thái trong quá trình thiết kế.

Trong bài toán xe hai bánh tự cân bằng, yêu cầu khôi phục cân bằng và yêu cầu bám vị trí thường có các tiêu chí tối ưu khác nhau. Các trọng số phù hợp cho quá trình khôi phục cân bằng thường không đảm bảo mang lại chất lượng bám vị trí tốt và ngược lại. Để giải quyết bài toán trên, nghiên cứu này đề xuất giải pháp sử dụng hai bộ điều khiển LQR được thiết kế riêng biệt cho từng chế độ hoạt động, sau đó thực hiện chuyển đổi linh hoạt dựa trên trạng thái của hệ thống [14]. Cấu trúc của bài báo được sắp xếp như sau: Phần 2 xây dựng mô hình động lực học phi tuyến và thực hiện tuyến tính hóa quanh điểm cân bằng. Phần 3 trình bày chi tiết thiết kế hai bộ điều khiển LQR và luật chuyển đổi trạng thái. Phần 4 đưa ra các kịch bản và kết quả mô phỏng, đánh giá hiệu quả. Cuối cùng, Phần 5 là kết luận và định hướng phát triển.

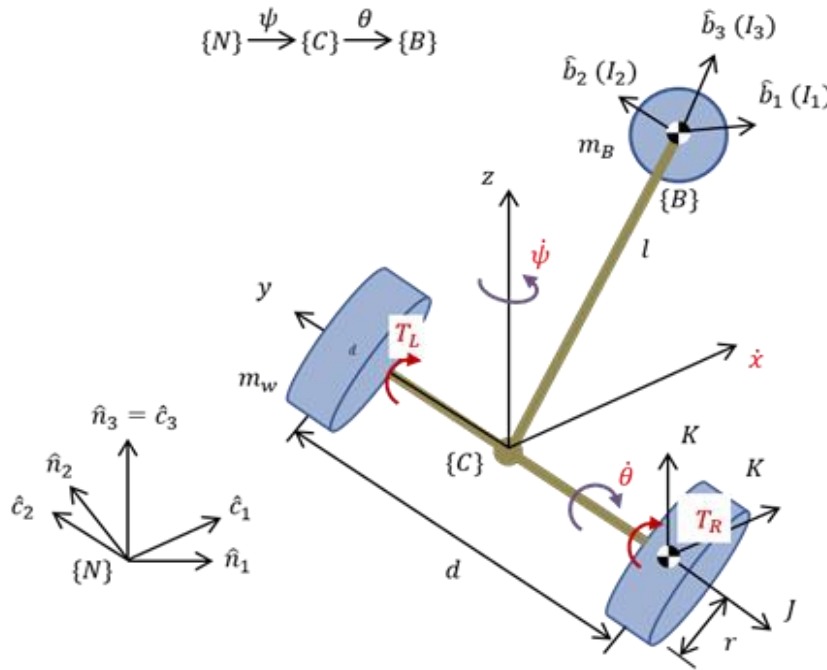
2. Mô hình động lực học hệ thống xe Segway

2.1. Xây dựng mô hình

Dưới góc độ mô hình, xe cân bằng là sự kết hợp của ba vật thể bao gồm hai bánh xe bên trái, bên phải và con lắc ngược như trong Hình 1, trong đó $\{N\}$ là hệ trục tọa độ cố định, $\{C\}$ là hệ trục tọa độ gắn tại trung tâm trục giữa hai bánh xe và $\{B\}$ là hệ trục tọa độ gắn tại con lắc ngược. Hệ thống này được đặc trưng bởi 2 ngõ vào điều khiển là mô men hai bánh và 3 tọa độ suy rộng tương ứng với 6 biến trạng thái vòng kín [15]. Xem xét phương

trình động lực học của xe Segway trong tài liệu [16] với các thông số cho bởi Bảng 1. Để đơn giản hóa

mô hình, ảnh hưởng của ma sát nhớt tại bánh xe được bỏ qua.



Hình 1. Mô hình xe Segway

$$\begin{aligned} & \{m_B + 2m_W + 2J/r^2\} \ddot{x} - m_B l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) s_\theta \\ & + (m_B l c_\theta) \ddot{\theta} = (T_L + T_R)/r \\ & (I_2 + m_B l^2) \ddot{\theta} + (I_3 - I_1 - m_B l^2) \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta \\ & + (m_B l c_\theta) \ddot{x} - m_B l g s_\theta = -(T_L + T_R) \\ & \left\{ I_3 + 2K + \frac{m_W d^2}{2} + \frac{J d^2}{2r^2} - (I_3 - I_1 - m_B l^2) s_\theta^2 \right\} \ddot{\psi} + \\ & \{m_B l \ddot{x} - 2(I_3 - I_1 - m_B l^2) \dot{\theta} c_\theta\} \dot{\psi} s_\theta = (T_R - T_L) d/2r \quad (1) \end{aligned}$$

Trong đó $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$, $c_\theta^2 = \cos^2 \theta$, $s_\theta^2 = \sin^2 \theta$. Các tham số khác bao gồm:

T_L, T_R : Mô men sinh ra tại 2 bánh.

x, θ, ψ : Vị trí tịnh tiến của tâm xe theo phương chuyển động, góc nghiêng của thân xe so với phương thẳng đứng và góc quay hướng của xe quanh trục thẳng đứng.

$\dot{x}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$: Vận tốc tịnh tiến, vận tốc góc nghiêng và tốc độ quay hướng của xe.

$\ddot{x}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}$: Gia tốc tịnh tiến, gia tốc góc nghiêng và gia tốc góc quay hướng của xe.

Thực hiện biến đổi các phương trình trong mô hình động lực học về dạng ma trận:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B\tau \quad (2)$$

Trong đó M, C, B và G lần lượt là ma trận quán tính, ma trận lực ly tâm và Coriolis, ma trận đầu vào của hệ và véc tơ trọng lực. q là véc tơ tọa độ tổng quát và τ là véc tơ mô men tác động lên hai bánh xe. Các ma trận và véc tơ có dạng như sau, các phần tử tương ứng được trình bày trong Phụ lục A.1.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/r & 1/r \\ -1 & -1 \\ -d/2r & d/2r \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} T_L \\ T_R \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_B l g s_\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Đặt $u_1 = T_L + T_R$ và $u_2 = T_R - T_L$, phương trình động lực học (1) được viết lại:

$$\begin{aligned} & m_{11} \ddot{x} + m_{12} \ddot{\theta} + c_{12} \dot{\theta} + c_{13} \dot{\psi} = u_1/r \\ & m_{21} \ddot{x} + m_{22} \ddot{\theta} + c_{23} \dot{\psi} - m_B l g s_\theta = -u_1 \\ & m_{33} \ddot{\psi} + c_{31} \ddot{x} + c_{32} \ddot{\theta} + c_{33} \dot{\psi} = \frac{u_2 d}{2r} \quad (3) \end{aligned}$$

Bảng 1. Thông số mô hình xe Segway

Ký hiệu	Ý nghĩa tham số	Đơn vị
d	Khoảng cách hai bánh xe	m
l	Chiều dài con lắc	m
r	Bán kính bánh xe	m
m_B	Khối lượng con lắc	kg
m_W	Khối lượng bánh xe	kg
J,K	MOI của bánh trên các trục	kgm ²
I_1, I_2, I_3	MOI của con lắc đối với {B}	kgm ²

MOI= Mass moment of inertia – Mô men quán tính khối lượng

Từ đó thu được phương trình không gian trạng thái của hệ thống:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{m_{12}c_{23}\dot{\psi} - m_{12}m_B l g s_{\theta} - m_{22}c_{12}\dot{\theta} - m_{22}c_{13}\dot{\psi}}{m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}} \\ &\quad + \frac{m_{22}r + m_{12}}{m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}} u_1 \\ \ddot{\theta} &= \frac{m_{11}c_{23}\dot{\psi} - m_{11}m_B l g s_{\theta} - m_{21}c_{12}\dot{\theta} - m_{21}c_{13}\dot{\psi}}{m_{12}m_{21} - m_{22}m_{11}} \\ &\quad + \frac{\frac{m_{21}}{r} + m_{11}}{m_{12}m_{21} - m_{22}m_{11}} u_1 \\ \ddot{\psi} &= -\frac{c_{31}\dot{x} + c_{32}\dot{\theta} + c_{33}\dot{\psi}}{m_{33}} + \frac{u_2 d}{2m_{33}r}\end{aligned}\quad (4)$$

Điểm cân bằng được xem xét trong nghiên cứu này tương ứng với trạng thái thân xe thẳng đứng trên mặt phẳng ngang, với $\theta=0$, $\dot{\theta}=0$ đồng thời vận tốc tịnh tiến $\dot{x}$ và vận tốc góc quay hướng $\dot{\psi}$ bằng không. Các tọa độ x và ψ không nhất thiết phải bằng không mà có thể nhận các giá trị cân bằng mong muốn x^* và ψ^* . Trong quá trình xe tăng tốc hoặc giảm tốc để bám giá trị đặt, góc nghiêng có thể khác không nhằm tạo chuyển động tịnh tiến. Khi xe tiến tới vị trí đặt và vận tốc giảm về không, bộ điều khiển đưa góc nghiêng trở lại lân cận $\theta=0$. Do đó, điểm cân bằng thẳng đứng được sử dụng để tuyến tính hóa là trạng thái xác lập mong muốn của bài toán điều khiển, trong khi các biến thiên góc nghiêng trong giai đoạn quá độ được xét trên mô hình động lực học phi tuyến. Mô hình phi tuyến ở phương trình (4) có thể được tuyến tính hóa xung quanh điểm cân bằng xác định với điều kiện

$$[\dot{x}, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0].$$

Tại điểm cân bằng này, sử dụng các xấp xỉ $\sin \theta \approx \theta$ và $\cos \theta \approx 1$. Thực hiện tuyến tính hóa Taylor bậc nhất cho phương trình (4), các thành phần bậc hai và bậc cao như $\dot{\psi}^2$, $\dot{\theta}^2$ và các tích giữa các vận tốc được lược bỏ. Cuối cùng thu được phương trình tuyến tính hóa với các phần tử tuyến tính được trình bày trong Phụ lục A.2:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{-\hat{m}_{12}m_B l g}{\hat{m}_{11}\hat{m}_{22} - \hat{m}_{21}\hat{m}_{12}} \theta + \frac{\frac{\hat{m}_{22}}{r} + \hat{m}_{12}}{\hat{m}_{11}\hat{m}_{22} - \hat{m}_{21}\hat{m}_{12}} u_1 \\ \ddot{\theta} &= \frac{-\hat{m}_{11}m_B l g}{\hat{m}_{12}\hat{m}_{21} - \hat{m}_{22}\hat{m}_{11}} \theta + \frac{\frac{\hat{m}_{21}}{r} + \hat{m}_{11}}{\hat{m}_{12}\hat{m}_{21} - \hat{m}_{22}\hat{m}_{11}} u_1 \\ \ddot{\psi} &= \frac{u_2 d}{2\hat{m}_{33}r}\end{aligned}\quad (5)$$

Có thể thấy u_1 là thành phần mô men tổng dùng để điều khiển chuyển động tịnh tiến và góc nghiêng thân xe, còn u_2 là thành phần để điều khiển góc quay hướng ψ . Với mục tiêu khôi phục cân bằng, thành phần điều khiển chính là u_1 .

2.2. Kiểm chứng mô hình tuyến tính hóa

Từ mô hình động lực học phi tuyến (4) và mô hình tuyến tính hóa trong phương trình (5), ta tiến hành xây dựng mô phỏng xe Segway. Để đánh giá ảnh hưởng của quá trình tuyến tính hóa, mô hình động lực học phi tuyến và mô hình tuyến tính hóa được mô phỏng song song với cùng bộ tham số vật lý được trình bày trong phụ lục A.3, cùng điều kiện ban đầu và cùng tín hiệu mô men tác động lên hai bánh T_L và T_R . Do đó, sai khác giữa các đáp

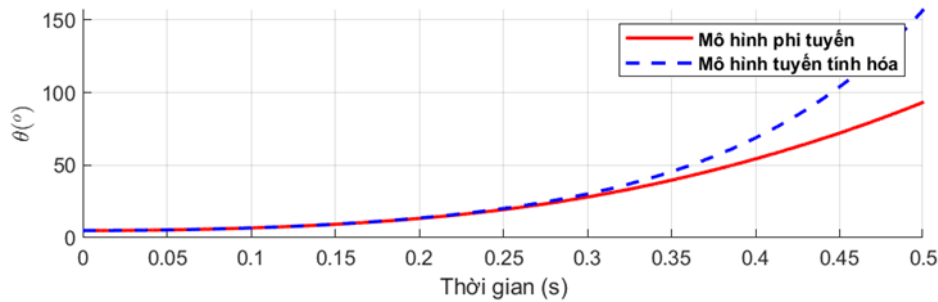
ứng của hai mô hình trong các kịch bản dưới đây chỉ xuất phát từ phép xấp xỉ tuyến tính quanh điểm cân bằng.

2.2.1. Kịch bản mô phỏng 1

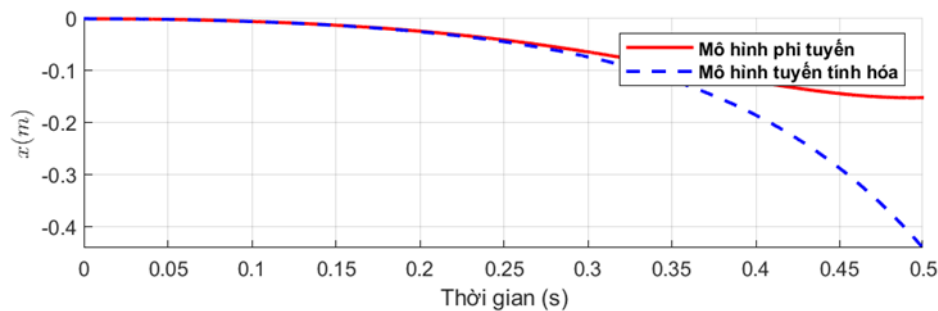
Thời gian mô phỏng 0.5s, xe cân bằng không được cấp mô men điều khiển $T_L=T_R=0$, góc nghiêng ban đầu $\theta=5^\circ$, vị trí và góc quay ban đầu

$x=0, \psi=0$.

Kết quả của kịch bản 1 được đưa ra trong Hình 2. Với góc nghiêng ban đầu là $\theta=5^\circ$ ta thấy góc nghiêng của xe có xu hướng tăng lên. Khi góc nghiêng lớn, các xấp xỉ tuyến tính không còn đúng, dẫn đến sai số giữa mô hình phi tuyến và tuyến tính hóa tăng mạnh.

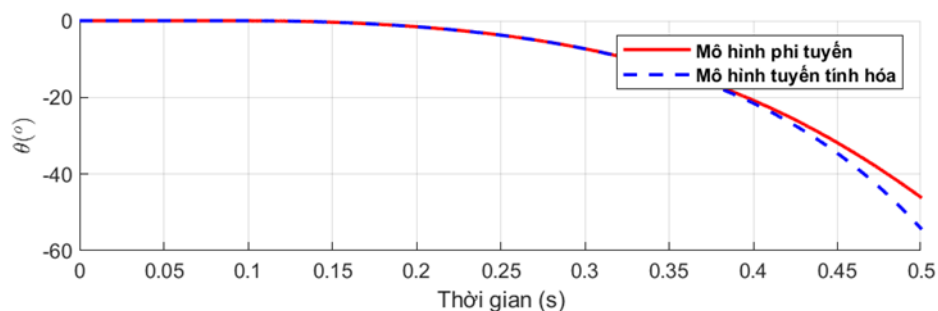


(a)

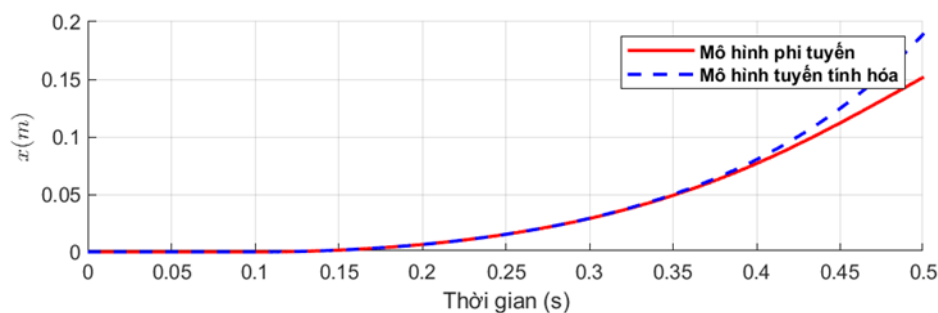


(b)

Hình 2. Đáp ứng của xe khi không cấp mô men (a) Góc nghiêng xe; (b) Vị trí xe



(a)



(b)

Hình 3. Đáp ứng của xe khi được cấp mô men (a) Góc nghiêng xe; (b) Vị trí xe

2.2.2. Kịch bản mô phỏng 2

Thời gian mô phỏng 0.5s, xe cân bằng được cấp mô men điều khiển $T_L=T_R=0.5$ Nm trong khoảng từ 0.1s đến 0.5s, góc nghiêng ban đầu $\theta=0^\circ$, vị trí và góc quay ban đầu $x=0$, $\psi=0$.

Kết quả của kịch bản 2 được đưa ra trong Hình 3. Ban đầu xe vẫn ở vị trí cân bằng, khi tác động mô men cùng chiều và cùng độ lớn cho cả hai bánh, độ lớn của vị trí xe và góc nghiêng có xu hướng tăng. Tuy nhiên dấu của góc nghiêng ngược với dấu của mô men tác động, góc quay của xe không thay đổi trong trường hợp này.

Qua các kịch bản mô phỏng, có thể thấy đáp ứng của mô hình phù hợp với đặc tính động lực học kỳ vọng của xe hai bánh tự cân bằng. Tính không ổn định tự nhiên và sự tương tác giữa chuyển động tịnh tiến và góc nghiêng đặt ra yêu cầu bộ điều khiển phải đảm bảo khả năng ổn định nhanh và phối hợp đồng thời nhiều biến trạng thái. Do đó, trong nghiên cứu này, bộ điều khiển LQR được lựa chọn để giải quyết bài toán ổn định và bám trạng thái của hệ.

3. Thiết bị bộ điều khiển LQR

Đặt X là véc tơ biến trạng thái của hệ thống mô tả động lực học của hệ, X_e là điểm cân bằng sử dụng để tuyến tính hóa:

$$X=[x, \dot{x}, \psi, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}]^T, X_e=[x_e, 0, \psi_e, 0, 0, 0]^T \quad (6)$$

Khi đó phương trình tuyến tính hóa quanh điểm làm việc của hệ thống xác định bởi:

$$\delta\dot{X}=A\delta X+B\delta u, \delta u=u-u_e \quad (7)$$

Trong đó, $\delta X=X-X_e$ là biến lệch trạng thái. Tại điểm cân bằng được xét, mô men điều khiển cân bằng bằng không, do đó $\delta u=u$. Các ma trận và véc tơ với các phần tử tương ứng được trình bày trong Phụ lục A.4 có dạng như sau:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & b_{16} \\ 0 & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

3.1. Điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu LQR

LQR là phương pháp điều khiển tối ưu cho hệ thống tuyến tính, mục tiêu của phương pháp LQR là thiết kế ma trận điều khiển nhằm tối thiểu hóa một hàm chi phí bậc hai, hàm này phản ánh sự cân bằng giữa độ lệch của trạng thái hệ thống và độ lớn của tín hiệu điều khiển. Bằng cách này, LQR không chỉ giúp hệ thống đạt được trạng thái mong muốn một cách ổn định mà còn tối ưu hiệu suất điều khiển theo tiêu chí năng lượng hoặc độ chính xác.

Đối với phương trình trạng thái (7), hàm chi phí được định nghĩa:

$$J=\int_0^\infty (\delta X^T Q \delta X + u^T R u) dt \quad (8)$$

Với Q là ma trận bán xác định dương xác định mức độ quan trọng của các sai lệch trạng thái. R là ma trận trọng số xác định dương phản ánh chi phí cho tín hiệu điều khiển. u là véc tơ tín hiệu điều khiển.

Để tối thiểu hàm chi phí, sử dụng phương trình Riccati đại số, trong đó P là ma trận đối xứng xác định dương:

$$PA+A^T P+Q-PBR^{-1}B^T P=0 \quad (9)$$

Ma trận P thỏa mãn (9) cho phép xác định véc tơ điều khiển tối ưu $u=-R^{-1}B^T P \delta X$.

Xét tín hiệu điều khiển phản hồi trạng thái $u=-K\delta X$ ta xác định được ma trận điều khiển phản hồi trạng thái tối ưu: $K=R^{-1}B^T P$.

3.2. Thiết kế bộ điều khiển LQR khôi phục cân bằng

Trong mục này, bộ điều khiển LQR được thiết kế nhằm thực hiện nhiệm vụ khôi phục cân bằng cho xe Segway khi thân xe có góc nghiêng ban đầu so với phương thẳng đứng. Bài toán khôi phục cân bằng trong nghiên cứu này xét trường hợp xe có góc nghiêng ban đầu $\theta_0=20^\circ$. Đây là giới hạn cơ khí tối đa của mô hình cấu trúc xe Segway thực tế

đang được nghiên cứu. Mặc dù góc lệch này tương đối lớn so với điểm tuyến tính hóa, kết quả mô phỏng trên mô hình động lực học phi tuyến cho thấy bộ điều khiển LQR vẫn có khả năng đưa hệ nhanh chóng về vùng lân cận của điểm cân bằng thẳng đứng.

Đối với bài toán khôi phục cân bằng, mục tiêu điều khiển chính là đưa góc nghiêng θ về 0, đồng thời hạn chế dao động của xe trong quá trình khôi phục cân bằng. Ma trận R là ma trận đơn vị. Q là ma trận đường chéo dương có các trọng số tương ứng với θ được chọn lớn nhằm tăng khả năng đưa thân xe nhanh chóng trở về vị trí thẳng đứng. Các trọng số còn lại được lựa chọn nhằm cân bằng giữa yêu cầu hạn chế chuyển động của xe, giảm dao động quá độ và duy trì mức tín hiệu điều khiển phù hợp. Từ đó, ma trận Q và ma trận K tương ứng được lựa chọn như sau:

$$Q = \text{diag}(10, 1, 50, 1, 500, 10)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_x & 0 & K_\theta \\ 0 & K_\psi & 0 \end{bmatrix}$$

Với:

$$K_x = [-3.1623 \quad -6.3277]$$

$$K_\psi = [7.0711 \quad 2.7771]$$

$$K_\theta = [-46.3505 \quad -6.8267]$$

Sau khi góc nghiêng thân robot đi vào vùng lân cận cân bằng trong một khoảng thời gian xác định, bộ điều khiển được chuyển từ LQR khôi phục cân bằng sang LQR bám vị trí.

3.3. Thiết kế bộ điều khiển LQR bám vị trí

Đặt $X^* = [x^*, 0, \psi^*, 0, 0, 0]^T$ là trạng thái đặt. Bộ LQR bám vị trí được sử dụng nhằm duy trì trạng thái cân bằng đồng thời điều khiển vị trí xe bám theo x^* . Trên cơ sở cấu trúc điều khiển này, bài toán được mở rộng để đồng thời đánh giá khả năng bám góc quay hướng ψ^* . Khi đó, luật điều khiển bộ LQR bám vị trí được xác định bởi:

$$u = -K_{\text{track}} e$$

Với $e = X - X^*$ là sai lệch bám trạng thái.

Các trọng số của ma trận Q khi này được lựa

chọn để tăng khả năng bám vị trí; đồng thời duy trì góc nghiêng thân robot quanh vị trí cân bằng; các trọng số còn lại được hiệu chỉnh nhằm giảm dao động vận tốc. Do mô hình trạng thái đồng thời chứa góc quay hướng ψ , cấu trúc phản hồi này cũng được mở rộng để thực hiện bám giá trị đặt ψ^* . Ma trận Q và ma trận K_{track} tương ứng được đề xuất như sau:

$$Q = \text{diag}(500, 5, 50, 1, 500, 10)$$

$$K_{\text{track}} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & K_\theta \\ 0 & K_\psi & 0 \end{bmatrix}$$

Với:

$$K_x = [-22.3607 \quad -20.4623]$$

$$K_\psi = [7.0711 \quad 2.7771]$$

$$K_\theta = [-62.7658 \quad -10.7162]$$

Bộ điều khiển bám vị trí chỉ được kích hoạt khi góc nghiêng thân robot nằm trong vùng lân cận của điểm cân bằng. Điều kiện chuyển chế độ có thể được biểu diễn như sau:

$$|\theta| \leq \theta_{\text{bound}}, |\dot{\theta}| \leq \dot{\theta}_{\text{bound}} \quad (10)$$

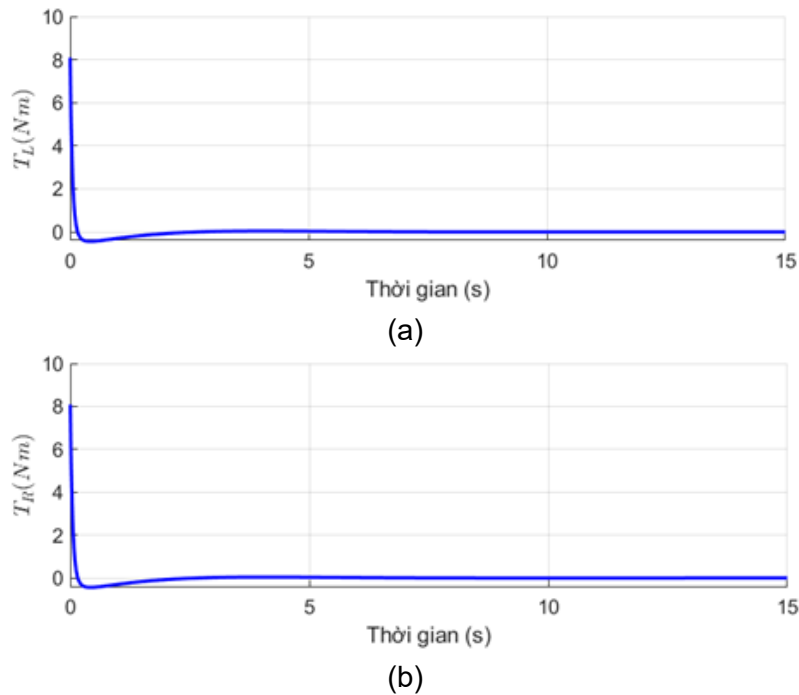
Trong đó θ_{bound} , $\dot{\theta}_{\text{bound}}$ là ngưỡng đặt, được lựa chọn dựa trên yêu cầu an toàn và mức độ ổn định mong muốn trước khi chuyển sang chế độ bám vị trí. Để tránh hiện tượng chuyển đổi do dao động quá độ hoặc khi hệ chỉ đi qua vùng cân bằng trong thời gian ngắn, điều kiện trên phải được duy trì liên tục trong khoảng thời gian T_{hold} trước khi bộ điều khiển bám vị trí được kích hoạt.

4. Mô phỏng kiểm chứng

Để đánh giá hiệu quả của các bộ điều khiển LQR đã thiết kế, mô phỏng được thực hiện trên mô hình động lực học phi tuyến của xe Segway. Các kết quả mô phỏng được sử dụng nhằm kiểm chứng khả năng khôi phục cân bằng, khả năng bám vị trí và khả năng phối hợp giữa hai bộ điều khiển trong quá trình vận hành. Các tham số mô phỏng được trình bày trong Phụ lục A.

4.1. Điều khiển khôi phục cân bằng

Tiến hành mô phỏng điều khiển xe cân bằng với kịch bản mô phỏng: Góc nghiêng ban đầu $\theta_0 = 20^\circ$, vị trí và góc quay ban đầu $x_0 = 0$, $\psi_0 = 0$.



Hình 4. Kết quả kích bản 1 (a) Mô men bánh trái xe; (b) Mô men bánh phải xe

Bảng 2. Hiệu quả bộ điều khiển trong kích bản 1

Chỉ tiêu đánh giá	Giá trị
t_s góc nghiêng ($\pm 5\%$) (s)	1.8
M_P góc nghiêng (%)	15.8
e_{ss} góc nghiêng ($^\circ$)	< 0.1
Độ lệch vị trí cực đại (m)	0.27
Mô men bánh xe cực đại (Nm)	8.09

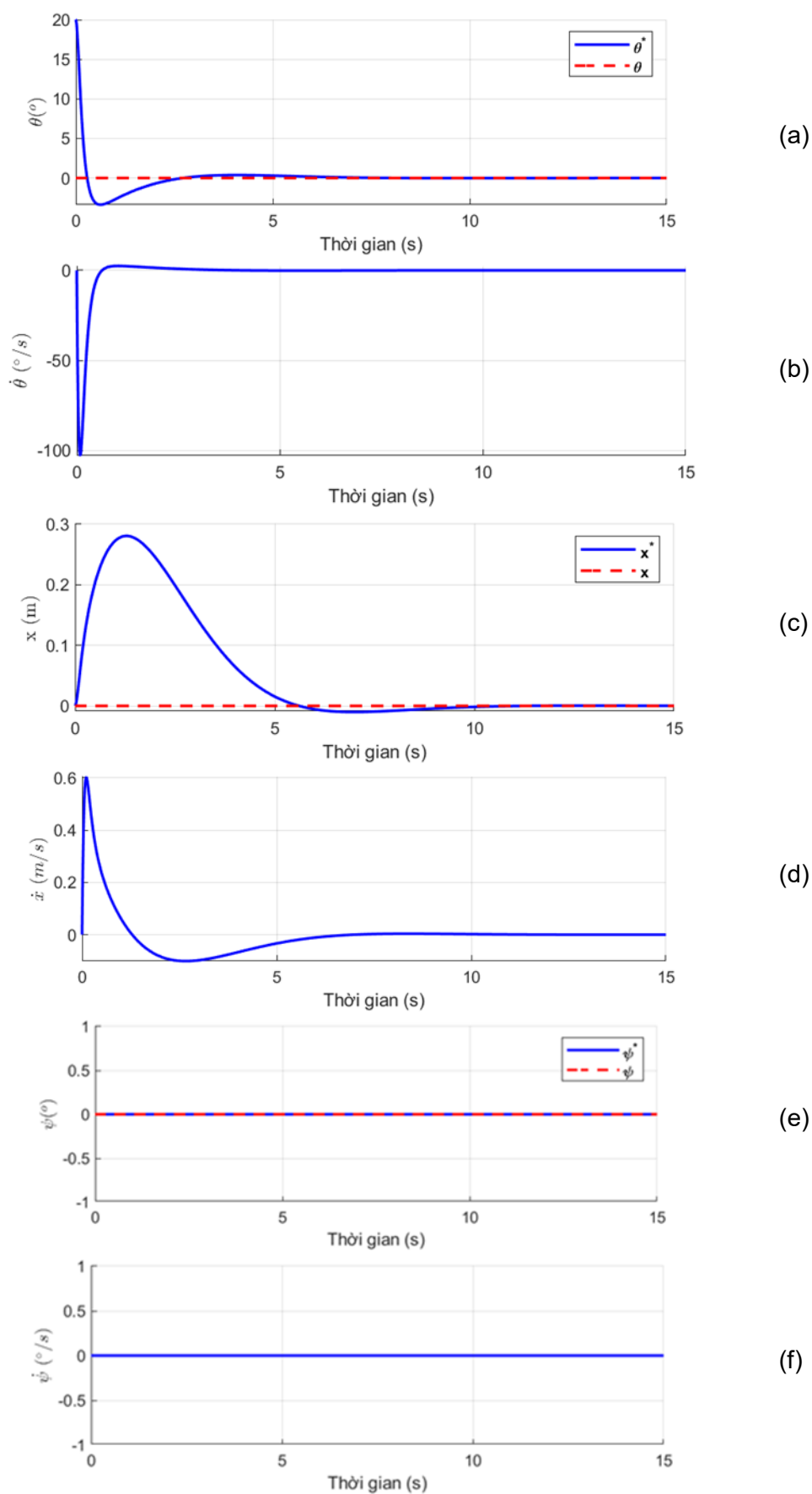
t_s : thời gian xác lập, M_P : độ quá điều chỉnh, e_{ss} : sai lệch tĩnh

Từ các kết quả mô phỏng Hình 4, Hình 5 và Bảng 2, có thể thấy bộ điều khiển LQR khôi phục cân bằng đã đưa thân xe từ góc nghiêng ban đầu $\theta_0 = 20^\circ$ về vùng lân cận vị trí cân bằng $\theta^* = 0^\circ$.

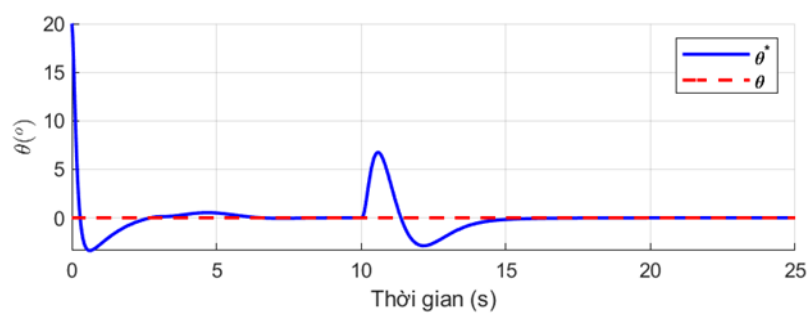
Góc nghiêng của thân xe giảm nhanh trong giai đoạn đầu, sau đó xuất hiện dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng trước khi được triệt tiêu. Điều này cho thấy bộ điều khiển có khả năng ổn định trạng thái không bền tự nhiên của xe hai bánh tự cân bằng. Trong quá trình này, bánh xe dịch chuyển để đưa trọng tâm của hệ trở lại vùng ổn định. Sau khi góc nghiêng được khôi phục, vị trí xe dần quay về gần vị trí ban đầu và không xuất hiện hiện tượng trôi không kiểm soát. Vận tốc tịnh tiến $\dot{x}$ cũng giảm về 0, cho thấy xe đạt trạng thái đứng yên sau quá trình cân bằng.

Các đáp ứng của góc quay ψ và vận tốc góc quay $\dot{\psi}$ gần như bằng 0 trong toàn bộ quá trình mô phỏng. Điều này phù hợp với kích bản khôi phục cân bằng, trong đó hai bánh xe được điều khiển đối xứng và không tạo ra mô men quay quanh trục đứng. Như vậy, bộ điều khiển khôi phục cân bằng chủ yếu tác động lên chuyển động tịnh tiến và góc nghiêng, trong khi không làm phát sinh chuyển động quay không mong muốn.

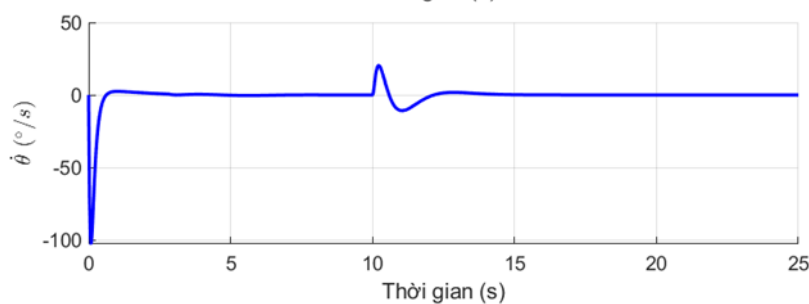
Nhìn chung, kết quả mô phỏng chứng minh rằng bộ điều khiển LQR khôi phục cân bằng có khả năng đưa xe từ trạng thái nghiêng ban đầu về trạng thái cân bằng ổn định. Hệ thống có dao động quá độ nhưng dao động được triệt tiêu sau một khoảng thời gian ngắn, các trạng thái vận tốc tiến về 0 và không xuất hiện mất ổn định trong quá trình khôi phục.



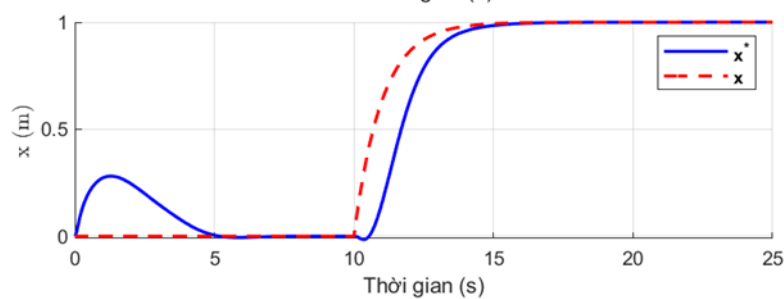
Hình 5. Kết quả kịch bản 1: (a) Góc nghiêng xe; (b) Vận tốc góc nghiêng xe; (c) Vị trí xe; (d) Vận tốc xe; (e) Góc quay xe; (f) Vận tốc góc quay xe.



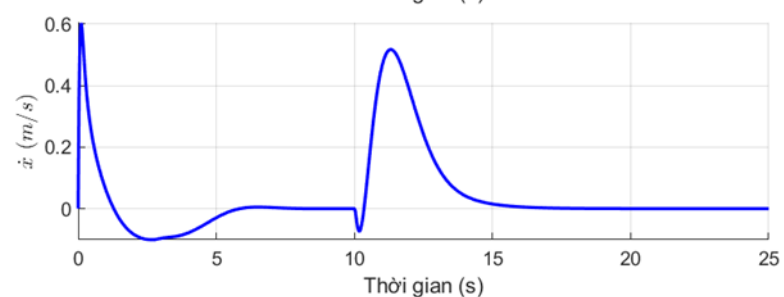
(a)



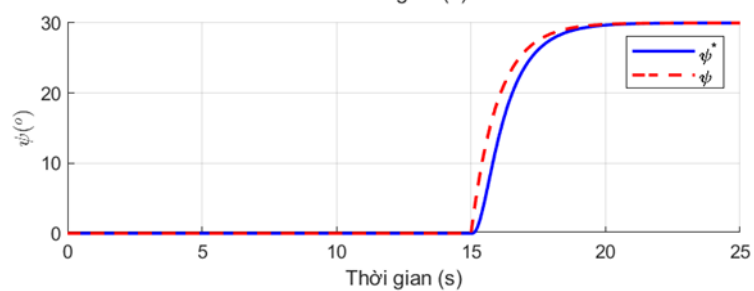
(b)



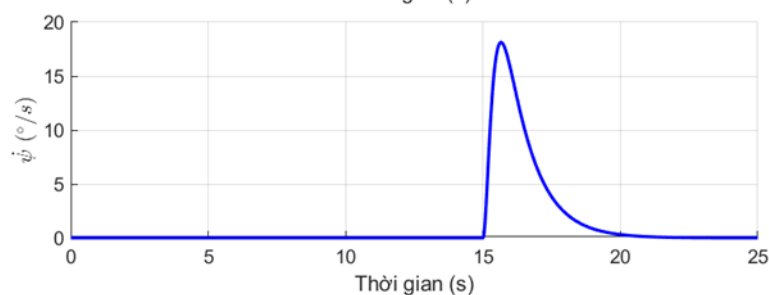
(c)



(d)



(e)



(f)

Hình 6. Kết quả kịch bản 2: (a) Góc nghiêng xe; (b) Vận tốc góc nghiêng xe; (c) Vị trí xe; (d) Vận tốc xe; (e) Góc quay xe; (f) Vận tốc góc quay xe

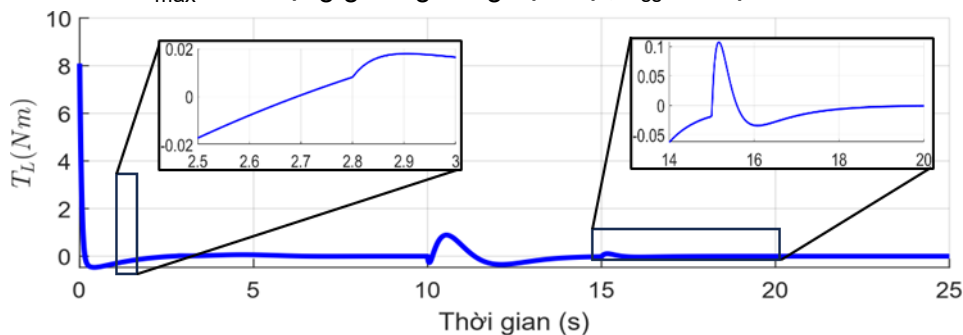
4.2. Điều khiển tổng hợp khôi phục cân bằng và bám vị trí

Kịch bản 2 có thời gian mô phỏng 25s, góc nghiêng ban đầu $\theta_0=20^\circ$, vị trí và góc quay ban đầu $x=0$, $\psi=0$. Sau 10s, vị trí đặt cho xe x^* tăng đến 1 theo hàm quán tính bậc 1 với $T=1$. Sau 15s góc quay đặt cho xe ψ^* tăng đến 30° theo hàm quán tính bậc 1 với $T=1$ nhằm đánh giá khả năng điều khiển vị trí và góc quay hướng của xe trong cùng một kịch bản vận hành. Điều kiện chuyển đổi bộ điều khiển là $\theta_{\text{bound}}=1^\circ$, $\dot{\theta}_{\text{bound}}=6^\circ/\text{s}$ và $T_{\text{hold}}=0.1\text{s}$.

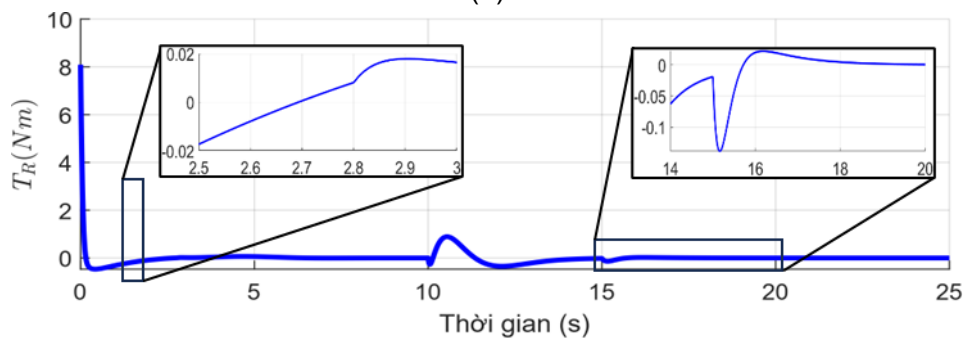
Bảng 3. Hiệu quả bộ điều khiển trong kịch bản 2

Chỉ tiêu đánh giá	Giá trị
Thời điểm chuyển bộ điều khiển (s)	2.6
θ_{max} max khi bám vị trí ($^\circ$)	6.5
e_{ss} vị trí (m)	<0.01

θ_{max} : dao động góc nghiêng cực đại, e_{ss} : sai lệch tĩnh



(a)



(b)

Hình 7. Kết quả kịch bản 2 (a) Mô men bánh trái xe; (b) Mô men bánh phải xe

Trong Hình 7, quanh thời điểm chuyển chế độ các mô men điều khiển T_L và T_R biến thiên liên tục, không xuất hiện bước nhảy gián đoạn đáng kể. Kết quả này cho thấy việc chuyển đổi giữa hai bộ điều khiển không gây ra biến thiên đột ngột đáng kể của tín hiệu mô men trong kịch bản khảo sát. Sau khi xe đã đạt điều kiện chuyển chế độ, bộ điều

Từ kết quả mô phỏng trong Hình 6, Hình 7 và Bảng 3, có thể thấy bộ điều khiển LQR tổng hợp đã đáp ứng được yêu cầu điều khiển đặt ra.

Ban đầu, bộ điều khiển LQR khôi phục cân bằng đã đưa góc nghiêng θ nhanh chóng tiến về vùng lân cận vị trí cân bằng. Trong quá trình khôi phục cân bằng, vị trí xe x có sự dịch chuyển nhất định do bánh xe cần di chuyển để đưa trọng tâm của hệ trở lại trạng thái cân bằng. Sau đó vị trí xe dần ổn định trở lại, cho thấy hệ thống không bị trôi không kiểm soát.

khởi được chuyển sang chế độ LQR bám vị trí. Khi tín hiệu đặt vị trí x^* hay góc quay ψ^* thay đổi, trạng thái thực tế của xe đã bám theo tín hiệu đặt với sai lệch nhỏ. Trong quá trình thay đổi góc quay hướng ψ , hai mô men bánh T_L và T_R có dấu ngược nhau, tạo ra thành phần mô men chênh lệch để thực hiện chuyển động quay. Đồng thời, tổng mô

men tác động theo phương chuyển động tịnh tiến xấp xỉ bằng không, $T_L + T_R \approx 0$. Do đó, trong giai đoạn điều khiển góc quay, vị trí x và góc nghiêng θ hầu như không thay đổi, trong khi ψ bám theo giá trị đặt và $\dot{\psi}$ tiến về 0 sau quá trình quá độ. Điều này cho thấy bộ điều khiển LQR không chỉ đảm bảo khả năng khôi phục cân bằng ban đầu mà còn đáp ứng tốt yêu cầu điều khiển vị trí và góc quay của xe.

5. Kết luận

Trong đề tài này, từ mô hình phi tuyến ban đầu, hệ được tuyến tính hóa quanh vị trí cân bằng thẳng đứng từ đó xây dựng bộ điều khiển LQR nhằm ổn định hệ và điều khiển các trạng thái của xe theo yêu cầu đặt ra.

Nghiên cứu đã xây dựng giải pháp điều khiển chuyển đổi cấu trúc sử dụng hai bộ điều khiển LQR độc lập cho hai giai đoạn: khôi phục cân bằng và bám vị trí của xe.

Kết quả mô phỏng cho thấy bộ LQR điều khiển vị trí xe và phần mở rộng cho bám góc quay hướng có khả năng bám theo giá trị đặt với sai lệch nhỏ, trong khi góc nghiêng thân xe vẫn được duy trì quanh điểm cân bằng. Điều này cho thấy bộ điều khiển LQR bám vị trí vẫn đảm bảo được yêu cầu ổn định trong quá trình xe di chuyển.

Hạn chế hiện tại của nghiên cứu là chưa xét đến nhiễu động ngẫu nhiên từ mặt đường và giả định mô hình hoàn toàn chính xác. Trong các nghiên cứu tiếp theo, bộ quan sát trạng thái và bộ quan sát nhiễu sẽ được xem xét nhằm nâng cao khả năng ước lượng trạng thái và giảm ảnh hưởng của nhiễu. Đồng thời, phương pháp đề xuất sẽ được kiểm chứng trên mô hình phần cứng thực tế.

Tuyên bố về việc sử dụng AI tạo sinh

Trong quá trình chuẩn bị bài báo, các tác giả đã sử dụng ChatGPT nhằm cải thiện khả năng diễn đạt ngôn ngữ của bản thảo. Sau khi sử dụng công cụ này, các tác giả đã rà soát và chỉnh sửa nội dung khi cần thiết, đồng thời chịu hoàn toàn trách nhiệm về nội dung của bài báo được công bố.

Tài liệu tham khảo

[1] Y. Kim, S.H. Kim, Y.K. Kwak. (2005). Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled

inverted pendulum robot. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 44(1), 25-46. <https://doi.org/10.1007/s10846-005-9022-4>

- [2] F. Grasser, A. D'Arrigo, S. Colombi, A.C. Rufer. (2002). JOE: a mobile, inverted pendulum. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49(1), 107-114. <https://doi.org/10.1109/41.982254>
- [3] J. Wu, Y. Liang, Z. Wang. (2011). A robust control method of two-wheeled self-balancing robot. *Proceedings of 2011 6th International Forum on Strategic Technology*, 2, pp. 1031-1035. <https://doi.org/10.1109/IFOST.2011.6021196>
- [4] F. Sun, Z. Yu, H. Yang. (2014). A design for two-wheeled self-balancing robot based on Kalman filter and LQR. *2014 International Conference on Mechatronics and Control (ICMC)*, pp. 612-616. <https://doi.org/10.1109/ICMC.2014.7231628>
- [5] V. Mudeng, B. Hassanah, Y.T.K. Priyanto, O. Saputra. (2020). Design and simulation of two-wheeled balancing mobile robot with PID controller. *International Journal of Sustainable Transportation Technology*, 3(1), 12-19. <https://doi.org/10.31427/IJSTT.2020.3.1.3>
- [6] N.G.M. Thao, D.H. Nghia, N.H. Phuc. (2010). A PID backstepping controller for two-wheeled self-balancing robot. *International Forum on Strategic Technology 2010*. Ulsan, South Korea, pp. 76-81. <https://doi.org/10.1109/IFOST.2010.5668001>
- [7] A.S. Shekhawat, Y. Rohilla. (2020). Design and control of two-wheeled self-balancing robot using Arduino. *2020 International Conference on Smart Electronics and Communication (ICOSEC)*. Trichy, India, pp. 1025-1030. <https://doi.org/10.1109/ICOSEC49089.2020.9215421>
- [8] C.C. Tsai, H.C. Huang, S.C. Lin. (2010).

- Adaptive neural network control of a self-balancing two-wheeled scooter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(4), 1420-1428. <https://doi.org/10.1109/TIE.2009.2039452>
- [9] W. He, Y. Chen, Z. Yin. (2015). Adaptive neural network control of an uncertain robot with full-state constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 46(3), 620-629. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2015.2411285>
- [10] J.X. Xu, Z.Q. Guo, T.H. Lee. (2012). Design and implementation of a Takagi–Sugeno-type fuzzy logic controller on a two-wheeled mobile robot. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 60(12), 5717-5728. <https://doi.org/10.1109/TIE.2012.2230600>
- [11] C.B. Jabeur, H. Seddik. (2021). Design of a PID optimized neural networks and PD fuzzy logic controllers for a two-wheeled mobile robot. *Asian Journal of Control*, 23(1), 23-41. <https://doi.org/10.1002/asjc.2356>
- [12] J. Huang, M. Ri, D. Wu, S. Ri. (2017). Interval type-2 fuzzy logic modeling and control of a mobile two-wheeled inverted pendulum. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(4), 2030-2038. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2017.2760283>
- [13] J. Fang. (2014). The LQR controller design of two-wheeled self-balancing robot based on the particle swarm optimization algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014(1), 729095. <https://doi.org/10.1155/2014/729095>
- [14] D. Liberzon. (2003). Switching in systems and control. *Birkhauser*, Boston. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0017-8>
- [15] K. Pathak, J. Franch, S.K. Agrawal. (2005). Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(3), 505-513. <https://doi.org/10.1109/TRO.2004.840905>
- [16] S. Kim, S. Kwon. (2015). Dynamic modeling of a two-wheeled inverted pendulum balancing mobile robot. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 13(4), 926-933. <https://doi.org/10.1007/s12555-014-0564-8>

Phụ lục A**A.1. Các phần tử của các ma trận trong phương trình (2)**

$$m_{11}=m_B+2m_W+2J/r^2$$

$$m_{12}=m_{21}=m_B l c_\theta$$

$$m_{22}=I_2+m_B l^2$$

$$m_{33}=I_3+2K+(m_W d^2)/2+(J d^2)/(2r^2)-(I_3-I_1-m_B l^2) s_\theta^2$$

$$c_{12}=-m_B l \dot{\theta} s_\theta$$

$$c_{13}=-m_B l \dot{\psi} s_\theta$$

$$c_{23}=(I_3-I_1-m_B l^2) \dot{\psi} s_\theta c_\theta$$

$$c_{31}=m_B l \dot{\psi} s_\theta$$

$$c_{32}=-(I_3-I_1-m_B l^2) \dot{\psi} s_\theta c_\theta$$

$$c_{33}=-(I_3-I_1-m_B l^2) \dot{\theta} s_\theta c_\theta$$

A.2. Các phần tử của các ma trận trong phương trình (5)

$$\hat{m}_{11}=m_{11}$$

$$\hat{m}_{12}=\hat{m}_{21}=m_B l$$

$$\hat{m}_{22}=m_{22}$$

$$\hat{m}_{33}=I_3+2K+(m_W d^2)/2+(J d^2)/(2r^2)$$

A.3. Các tham số mô phỏng mô hình xe Segway**Bảng 4.** Tham số mô phỏng mô hình xe Segway

Tham số	Giá trị
d (m)	0.485
l (m)	0.3
r (m)	0.1397
m _B (kg)	10
m _W (kg)	4
g (m/s ²)	9.81
J (kgm ²)	.651×10 ⁻⁴
K (kgm ²)	5.229×10 ⁻³
I ₁ (kgm ²)	28.128×10 ⁻³
I ₃ (kgm ²)	28.07×10 ⁻³
I ₃ (kgm ²)	4.641×10 ⁻³

A.4. Các phần tử của các ma trận trong phương trình (7)

$$a_{25}=\frac{-\hat{m}_{12}m_B l g}{\hat{m}_{11}\hat{m}_{22}-\hat{m}_{21}\hat{m}_{12}}$$

$$a_{65}=\frac{-\hat{m}_{11}m_B l g}{\hat{m}_{12}\hat{m}_{21}-\hat{m}_{22}\hat{m}_{11}}$$

$$b_{12}=\frac{\frac{\hat{m}_{22}}{r}+\hat{m}_{12}}{\hat{m}_{11}\hat{m}_{22}-\hat{m}_{21}\hat{m}_{12}}$$

$$b_{16}=\frac{\frac{\hat{m}_{21}}{r}+\hat{m}_{11}}{\hat{m}_{12}\hat{m}_{21}-\hat{m}_{22}\hat{m}_{11}}$$

$$b_{24}=\frac{d}{2\hat{m}_{33}r}$$