



Tạp chí điện tử
Khoa học và Công nghệ Giao thông
Trang website: <https://jstt.vn/index.php/vn>



Static pull-in analysis of FG-CNTRC microbeams with piezoelectric layers

Article info

Type of article:

Original research paper

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2026.vn.6.7.82-97>

*Corresponding author:

Email address:

phibg@utt.edu.vn

Received: 08/07/2026

Received in Revised Form:
22/09/2026

Accepted: 25/09/2026

Dang Van Hieu^{1,2}, Nguyen Tien The³, Bui Gia Phi^{3*}

¹Thai Nguyen University of Technology, No.666, 3/2 Street, Tich Luong Ward, Thai Nguyen, Vietnam

²Phenikaa University, Nguyen Trac Street, Duong Noi Ward, Hanoi, Vietnam

³University of Transport Technology, 54 Trieu Khuc Street, Thanh Liet Ward, Hanoi, Vietnam

Abstract: This paper presents an analytical investigation on the electro-piezo-mechanical behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite (FG-CNTRC) microbeams incorporating size dependency. The microbeam is modeled based on the Euler–Bernoulli beam theory (EBT) in conjunction with the Modified Couple Stress Theory (MCST) to capture the small-scale effect. The effective material properties of the FG-CNTRC core are evaluated according to various carbon nanotube distribution patterns through the microbeam thickness. Surface-bonded piezoelectric layers are employed as actuators to generate electromechanical coupling effects, while the electrostatic force is modeled using the nonlinear parallel-plate actuator formulation. By applying Hamilton’s principle, the governing equations of the system are derived. The resulting model is then solved using an appropriate reduced-order numerical scheme to investigate the influences of CNT distributions, material gradation, piezoelectric actuation, size effect parameter, and geometric configuration on the static pull-in instability behavior of the system.

Keywords: Microbeam; FG-CNTRC; Modified couple stress theory; Piezoelectric layers; Static pull-in



Phân tích ổn định pull-in của dầm micro gia cường ống nano-carbon cơ tính biến đổi có lớp áp điện

Thông tin bài viết

Dạng bài viết:

Bài báo nghiên cứu

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2026.vn.6.7.82-97>

*Tác giả liên hệ:

Địa chỉ Email:

phibg@utt.edu.vn

Ngày nộp bài: 08/07/2026

Ngày nộp bài sửa: 22/09/2026

Ngày chấp nhận: 25/09/2026

Đặng Văn Hiếu^{1,2}, Nguyễn Tiến Thế³, Bùi Gia Phi^{3*}

¹Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên, số 666 đường 3/2, phường Tích Lương, Thái Nguyên, Việt Nam

²Đại học Phenikaa, đường Nguyễn Trác, phường Dương Nội, Hà Nội, Việt Nam

³Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, số 54 Triều Khúc, phường Thanh Liệt, Hà Nội, Việt Nam

Tóm tắt: Bài báo này trình bày nghiên cứu giải tích về ứng xử điện–cơ–áp điện của dầm micro composite gia cường bằng ống nano carbon cơ tính biến đổi (FG-CNTRC), có xét đến hiệu ứng phụ thuộc kích thước. Dầm micro được mô hình hóa dựa trên lý thuyết dầm Euler–Bernoulli (EBT) kết hợp với lý thuyết ứng suất cặp sửa đổi (MCST) nhằm mô tả hiệu ứng kích thước ở thang vi mô. Các tính chất hiệu dụng của lõi FG-CNTRC được xác định tương ứng với các kiểu phân bố CNT khác nhau theo chiều dày của dầm micro. Các lớp áp điện dán trên bề mặt được sử dụng như các bộ chấp hành nhằm tạo ra tương tác điện–cơ, trong khi lực tĩnh điện được mô hình hóa bằng mô hình tụ điện song song phi tuyến. Bằng cách áp dụng nguyên lý Hamilton, các phương trình chi phối của hệ được thiết lập. Mô hình thu được sau đó được giải bằng một sơ đồ số bậc giảm thích hợp nhằm khảo sát ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT, sự biến thiên vật liệu, kích thích áp điện, tham số hiệu ứng kích thước và cấu hình hình học đến hiện tượng mất ổn định pull-in tĩnh của hệ.

Từ khóa: Dầm micro, gia cường ống nano-carbon cơ tính biến đổi, lý thuyết ứng suất cặp sửa đổi, lớp áp điện, ổn định pull-in.

1. Giới thiệu

Các kết cấu dầm ở quy mô micro và nano đóng vai trò là những thành phần cốt lõi trong các hệ vi cơ điện tử và nano cơ điện tử (micro-electro-mechanical/nano-electro-mechanical systems, viết tắt là MEMS/NEMS), nơi chúng được ứng dụng rộng rãi như cảm biến, cơ cấu chấp hành và bộ cộng hưởng [1, 2]. Nhờ cấu hình đơn giản, khả năng đáp ứng nhanh và mức tiêu thụ năng lượng thấp, kích thích tĩnh điện đã trở thành một trong những cơ chế kích hoạt phổ biến nhất trong các

thiết bị MEMS/NEMS. Tuy nhiên, bản chất phi tuyến vốn có của lực tĩnh điện có thể ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử tĩnh và động của dầm micro, dẫn đến các hiện tượng như làm mềm độ cứng, dịch chuyển tần số dao động và mất ổn định pull-in [3, 4].

Do đó, việc xây dựng các mô hình cơ học chính xác cho dầm micro chịu kích thích tĩnh điện có ý nghĩa đặc biệt quan trọng đối với quá trình thiết kế và tối ưu hóa các thiết bị MEMS/NEMS có độ tin cậy cao. Trong những năm gần đây, vật liệu

composite gia cường ống nano carbon cơ tính biến đổi (functionally graded carbon nanotube-reinforced composite, viết tắt là FG-CNTRC) đã thu hút sự quan tâm mạnh mẽ trong các ứng dụng kết cấu micro nhờ các đặc tính cơ học vượt trội, tỷ số độ cứng/trọng lượng lớn và khả năng điều chỉnh đặc tính vật liệu thông qua các quy luật phân bố carbon-nanotube (viết tắt là CNT) khác nhau [5, 6]. Ở kích thước micro và nano, nhiều kết quả thực nghiệm đã chỉ ra rằng ứng xử cơ học của kết cấu phụ thuộc mạnh vào kích thước hình học, khiến các lý thuyết liên tục cổ điển không còn đủ khả năng mô tả chính xác đặc tính của hệ [7–9]. Để khắc phục hạn chế này, nhiều lý thuyết liên tục bậc cao đã được phát triển, trong đó lý thuyết ứng suất cặp sửa đổi (Modified couple stress theory – MCST) do Yang và cộng sự đề xuất [10] được xem là một trong những mô hình hiệu quả nhất nhờ khả năng đưa tham số chiều dài vật liệu nội tại vào quan hệ cấu thành nhằm phản ánh ảnh hưởng kích thước ở cấp vi mô. Liên quan đến hướng nghiên cứu này, Kong [11] đã thực hiện một nghiên cứu tổng quan toàn diện về các mô hình dầm và tấm micro dựa trên lý thuyết MCST, qua đó nhấn mạnh vai trò quan trọng của các lý thuyết phụ thuộc kích thước trong việc dự đoán chính xác ứng xử cơ học ở cấp độ vi mô mà lý thuyết đàn hồi cổ điển không thể mô tả đầy đủ. Nhiều công trình nghiên cứu sau đó đã tập trung vào phân tích ứng xử của các kết cấu FG-CNTRC và hệ thống minh áp điện ở cấp vi mô. Gia Phi và cộng sự [12] đã thực hiện phân tích dao động phi tuyến phụ thuộc kích thước của dầm micro FG-CNTRC tích hợp lớp áp điện trong môi trường nhiệt, làm nổi bật sự tương tác nhiệt–điện–cơ của hệ thống minh. Ahmadi và cộng sự [13] nghiên cứu dao động tự do của dầm micro FG-CNTRC có lớp áp điện bằng phương pháp phần tử hữu hạn đa tỉ lệ nhằm mô tả chính xác tương tác điện–cơ. Dehkordi và Beni [14] khảo sát dao động uốn–xoắn liên hợp của dầm micro Timoshenko FG-CNTRC có xét ảnh hưởng kích thước, qua đó chỉ ra vai trò đáng kể của hiệu ứng vi mô đối với đáp ứng động lực học. Dehkordi và cộng sự [15] tiếp tục nghiên cứu dao động phi tuyến của dầm

micro nhót xấp điện–từ–áp điện gia cường CNT kết tụ, đồng thời xét đến ảnh hưởng của tham số phi cục bộ, hiệu ứng bề mặt và tương tác đa trường. Yang và cộng sự [16] đã phân tích đặc tính động phi tuyến của dầm micro FG-CNTRC tích hợp lớp áp điện dựa trên khuôn khổ gradient ứng suất–biến dạng thống nhất nhằm mô tả đồng thời hiệu ứng kích thước và tương tác điện–cơ. Lê và cộng sự [17] đã nghiên cứu hiện tượng mất ổn định pull-in của dầm micro làm từ vật liệu biến đổi chức năng (Functionally graded - FG) có xét ảnh hưởng kích thước dựa trên lý thuyết MCST kết hợp với mô hình phần tử hữu hạn. Ngoài ra, Liu và Wang [18] phát triển mô hình đa trường để nghiên cứu dao động liên hợp nhiệt–điện–cơ của nanoshell áp điện làm từ vật liệu FG có lỗ rỗng, qua đó làm rõ ảnh hưởng của sự biến thiên vật liệu, phân bố lỗ rỗng và nhiệt độ đến đáp ứng động lực học của kết cấu.

Mặc dù đã đạt được nhiều kết quả quan trọng, phần lớn các nghiên cứu hiện nay chủ yếu xem xét riêng rẽ hoặc cơ học phụ thuộc kích thước của kết cấu gia cường CNT, hoặc ứng xử điện–cơ của các hệ áp điện thông minh. Vì vậy, một mô hình thống nhất có khả năng đồng thời xét đến vật liệu FG-CNTRC, hiệu ứng kích thước nội tại, tương tác áp điện và kích thích tĩnh điện phi tuyến vẫn còn chưa được nghiên cứu đầy đủ. Đặc biệt, ảnh hưởng tương hỗ giữa kích thích áp điện và phi tuyến tĩnh điện lên hiện tượng mất ổn định pull-in của dầm micro FG-CNTRC vẫn chưa được làm sáng tỏ một cách toàn diện.

Xuất phát từ những vấn đề trên, nghiên cứu này phát triển một mô hình điện–áp điện–cơ học tổng quát cho dầm micro FG-CNTRC có xét tới ảnh hưởng kích thước. Mô hình được xây dựng bằng cách kết hợp lý thuyết EBT với lý thuyết MCST, đồng thời tích hợp đầy đủ tương tác áp điện và lực tĩnh điện phi tuyến trong hệ phương trình chi phối. Các phương trình chi phối được thiết lập dựa trên nguyên lý Hamilton và được giải bằng phương pháp Galerkin. Những đóng góp chính của nghiên cứu có thể được tóm tắt như sau:

- Xây dựng mô hình điện–áp điện–cơ học

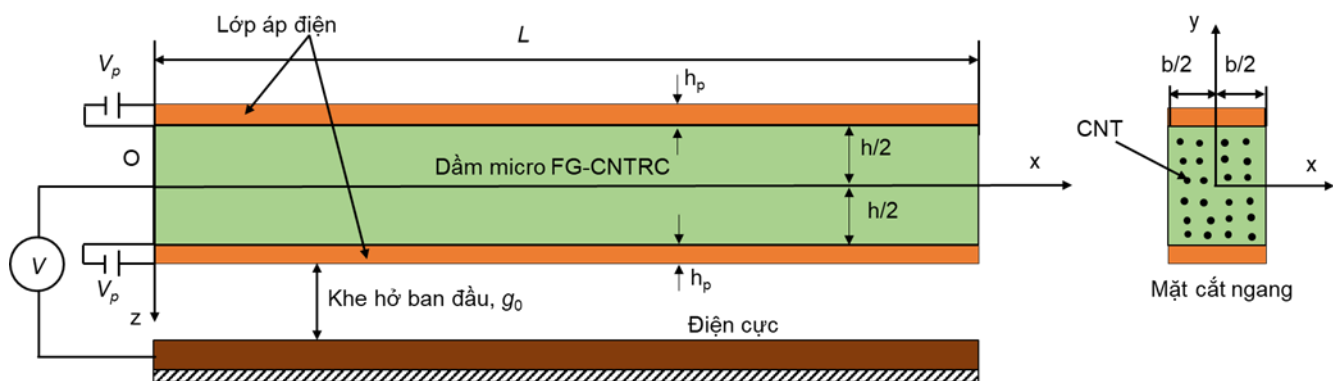
thống nhất cho dầm micro FG-CNTRC bằng cách đồng thời kết hợp EBT, MCST, tương tác áp điện và kích thích tĩnh điện phi tuyến.

- Thu được nghiệm giải tích cho điện thế pull-in bằng phương pháp Galerkin, cung cấp cơ sở tham chiếu tin cậy cho các nghiên cứu số và thực nghiệm trong tương lai.

- Khảo sát có hệ thống ảnh hưởng cạnh tranh và tương tác giữa kích thích áp điện và phi tuyến tĩnh điện lên đặc tính ổn định pull-in của dầm micro FG-CNTRC.

2. Mô hình và phương trình toán học

Cấu hình điện–áp điện–cơ học ba lớp của dầm micro FG-CNTRC phụ thuộc kích thước được xem xét như minh họa trong Hình 1. Dầm micro có chiều dài L , chiều rộng b và tổng chiều dày $h+2h_p$ bao gồm lõi FG-CNTRC có chiều dày h được kẹp đối xứng bởi hai lớp áp điện có cùng chiều dày h_p gắn trên bề mặt. Hệ tọa độ Đề các Oxyz được thiết lập với trục x nằm dọc theo mặt giữa của dầm micro và trục z theo phương chiều dày, trong đó $z = 0$ tương ứng với mặt giữa của lõi composite.



Hình 1. Mô hình dầm micro FG-CNTRC có lớp áp điện

Tỷ phần thể tích CNT được giả thiết biến thiên liên tục theo phương z dựa trên quy luật phân bố cho trước. Một điện trường tĩnh điện bên ngoài được tạo ra thông qua điện cực cứng đặt song song với bề mặt dưới của dầm micro tại khoảng hở không khí đều g_0 , trong khi bề mặt dưới được nối đất. Một điện áp DC không đổi V được đặt giữa điện cực và dầm micro, sinh ra áp suất tĩnh điện phi tuyến phụ thuộc vào độ võng tức thời và khoảng cách khe hở. Đồng thời, các lớp áp điện gắn trên bề mặt được kích hoạt điện để tạo ra tương tác điện–cơ bổ sung, cho phép thực hiện đồng thời chức năng cảm biến và chấp hành. Do đó, hệ kết cấu thể hiện sự tương tác liên hợp đầy đủ giữa trường cơ học, áp điện và tĩnh điện, đồng thời chịu ảnh hưởng của hiệu ứng phụ thuộc kích thước được mô tả bởi lý thuyết MCST.

Hai lớp áp điện PZT được gắn đối xứng lên mặt trên và mặt dưới của dầm FG-CNTRC. Các lớp được phân cực theo phương chiều dày và được điều khiển bởi điện áp ngoài. Hiệu ứng áp điện tạo ra lực dọc trục tương đương N_E^p , có thể

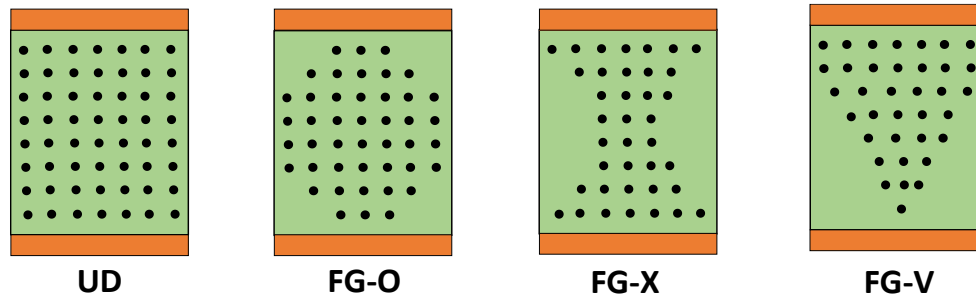
đóng vai trò như tải kéo hoặc tải nén ban đầu tùy thuộc vào dấu của điện áp điều khiển. Lực này tương tác với lực tĩnh điện và ảnh hưởng trực tiếp đến đặc tính ổn định pull-in của dầm micro.

Cần lưu ý rằng lực tĩnh điện trong nghiên cứu này được xác định dựa trên mô hình tụ điện bản cực song song lý tưởng, do đó ảnh hưởng của điện trường rìa (fringing field effect) không được xét đến. Giả thiết này thường được chấp nhận đối với các cấu hình MEMS có chiều dài và chiều rộng điện cực lớn hơn đáng kể so với khe hở ban đầu. Trong trường hợp xét đến điện trường rìa, lực tĩnh điện hữu hiệu có thể tăng nhẹ do sự gia tăng điện dung tương đương, dẫn đến giá trị điện áp pull-in nhỏ hơn so với dự đoán của mô hình hiện tại. Tuy nhiên, ảnh hưởng này chủ yếu mang tính định lượng và không làm thay đổi các xu hướng vật lý chính liên quan đến hiệu ứng kích thước, sự phân bố CNT và tác động điều khiển áp điện được trình bày trong nghiên cứu.

Bốn dạng phân bố điển hình của ống nano carbon (CNT) theo chiều dày của dầm micro được

xét cho lõi FG-CNTRC, bao gồm phân bố đều (UD), phân bố dạng O (FG-O), phân bố dạng X (FG-X) và phân bố dạng V (FG-V), như minh họa trong Hình 2.

Trong tất cả các trường hợp, CNT được giả



Hình 2. Các kiểu phân bố CNT

Đối với cấu hình UD, tỷ phần thể tích CNT không đổi trên toàn bộ chiều dày, do đó các đặc tính vật liệu của lõi FG-CNTRC là đồng nhất theo phương z. Cấu hình này thường được sử dụng làm trường hợp tham chiếu để so sánh với các dạng phân bố biến thiên khác.

Trong cấu hình FG-O, hàm lượng CNT lớn nhất tại vùng giữa và giảm dần về hai bề mặt trên và dưới của dầm micro, tạo thành quy luật phân bố dạng "O". Kiểu phân bố này làm tăng độ cứng tại vùng trung tâm của lõi composite.

Đối với cấu hình FG-X, CNT tập trung chủ yếu gần hai bề mặt trên và dưới của dầm micro và giảm dần về mặt trung hòa, hình thành dạng phân bố "X". Nhờ đó, độ cứng uốn của kết cấu được cải thiện đáng kể do CNT tập trung tại các vùng chịu ứng suất lớn nhất.

Trong khi đó, ở cấu hình FG-V, tỷ phần thể tích CNT lớn nhất tại bề mặt trên và giảm dần về phía bề mặt dưới, tạo nên quy luật phân bố dạng "V" theo chiều dày. Dạng phân bố này tạo ra sự bất đối xứng về đặc tính vật liệu và có thể ảnh hưởng đáng kể đến đáp ứng uốn và dao động của dầm micro.

Các dạng phân bố CNT theo chiều dày này cho phép điều chỉnh linh hoạt sự phân bố độ cứng cũng như đáp ứng điện-áp điện-cơ học của dầm micro FG-CNTRC có xét hiệu ứng kích thước.

Các đặc trưng vật liệu hiệu dụng của lõi FG-CNTRC, bao gồm mô đun đàn hồi Young (E_{11}^C và

thiết phân tán liên tục trong lõi composite, trong khi tỷ phần thể tích CNT biến thiên theo tọa độ chiều dày z, dẫn đến sự thay đổi các đặc tính cơ học và điện-cơ học theo phương chiều dày của dầm micro.

E_{22}^C), mô đun trượt (G_{12}^C), hệ số Poisson (ν_{12}^C và ν_{21}^C) và khối lượng riêng (ρ_{12}^C), được xác định thông qua quy luật hỗn hợp mở rộng (extended rule of mixtures), trong đó các hệ số hiệu quả CNT (η_1 , η_2 , và η_3) được đưa vào nhằm phản ánh ảnh hưởng kích thước nano, tương tác liên pha và cơ chế truyền tải ứng suất giữa nền vật liệu và ống nano carbon. Cách tiếp cận vi cơ học này cho phép mô tả đáng tin cậy ứng xử composite của lõi FG-CNTRC, đặc biệt khi kích thước kết cấu nằm trong miền vi mô. Theo đó, các mô đun Young hiệu dụng (E_{11}^C và E_{22}^C) cùng mô đun trượt (G_{12}^C) của lõi FG-CNTRC được xác định dựa trên quy luật hỗn hợp mở rộng như sau [5, 6]:

$$E_{11}^C(z) = \eta_1 V_{CNT}(z) E_{11}^{CNT} + V_m(z) E^m \quad (1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}^C(z)} = \frac{V_{CNT}(z)}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m(z)}{E^m} \quad (2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}^C(z)} = \frac{V_{CNT}(z)}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m(z)}{G^m} \quad (3)$$

Trong đó, E_{11}^{CNT} và E_{22}^{CNT} lần lượt là các mô đun đàn hồi Young của CNT, còn G_{12}^{CNT} là mô đun trượt của CNT; trong khi E^m và G^m biểu diễn các đặc trưng đàn hồi tương ứng của nền polymer đẳng hướng. Trong mô hình vật liệu FG-CNTRC, các tham số hiệu quả (η_1 , η_2 và η_3) được đưa vào như các hệ số hiệu chỉnh nhằm điều hòa sự khác biệt giữa dự đoán vi cơ học lý tưởng và ứng xử cơ học thực tế của vật liệu nanocomposite. Các tham số này phản ánh nhiều yếu tố phức tạp ở cấp nano,

bao gồm sự uốn cong của CNT, mức độ định hướng không hoàn hảo, hiện tượng tách lớp tại bề mặt tiếp xúc, sự kết tụ CNT và sự phân tán không đồng đều trong nền vật liệu. Do quy luật hỗn hợp cổ điển thường đánh giá quá cao độ cứng của composite khi giả thiết liên kết hoàn hảo và sự truyền tải ứng suất đồng nhất giữa CNT và nền vật liệu, các hệ số hiệu quả được sử dụng để hiệu chỉnh hợp lý đóng góp của CNT theo các phương dọc, ngang và trượt. Giá trị của các tham số này thường được xác định thông qua mô phỏng động lực học phân tử, thực nghiệm hoặc các phương pháp nhận dạng ngược, và đóng vai trò quan trọng trong việc dự đoán chính xác các đặc tính hiệu dụng của vật liệu FG-CNTRC. Tỷ phần thể tích của CNT (V_{CNT}) và nền polymer đẳng hướng (V_m) thỏa mãn quan hệ sau [5, 6]:

$$V_{CNT}(z) + V_m(z) = 1 \quad (4)$$

Điều này đảm bảo rằng vật liệu composite tại mọi vị trí theo chiều dày luôn được cấu thành hoàn toàn từ hai pha vật liệu thành phần.

Đối với dạng phân bố UD, CNT được phân bố đồng đều theo chiều dày dầm micro, do đó tỷ phần thể tích CNT cục bộ (V_{CNT}) theo phương z trùng với tỷ phần thể tích CNT tổng thể (V_{CNT}^*) của composite, được biểu diễn như sau [5, 6]:

$$V_{CNT}(z) = V_{CNT}^* \quad (5)$$

Đối với các dạng phân bố FG-O, FG-X và FG-V, sự biến thiên của tỷ phần thể tích CNT (V_{CNT}) theo chiều dày (phương z) được mô tả như sau [5, 6]:

$$V_{CNT}(z) = f(z) \cdot V_{CNT}^* \quad (6)$$

Trong đó, $f(z)$ là hàm phân bố đặc trưng cho quy luật biến thiên của CNT theo tọa độ chiều dày z . Đối với mỗi dạng phân bố CNT cơ tính biến đổi, biểu thức tương ứng của $f(z)$ được xác định như sau [5, 6]:

$$f(z) = \begin{cases} 2 - \frac{4|z|}{h} & \text{với FG-O} \\ \frac{4|z|}{h} & \text{với FG-X} \\ 1 + \frac{2z}{h} & \text{với FG-V} \end{cases} \quad (7)$$

Dựa trên các phương trình (5) - (7), tỷ phần thể tích CNT (V_{CNT}) tương ứng với bốn dạng phân

bố được biểu diễn như sau:

$$V_{CNT}(z) = \begin{cases} V_{CNT}^* & \text{với UD} \\ \left(2 - \frac{4|z|}{h}\right) \cdot V_{CNT}^* & \text{với FG-O} \\ \left(\frac{4|z|}{h}\right) \cdot V_{CNT}^* & \text{với FG-X} \\ \left(1 + \frac{2z}{h}\right) \cdot V_{CNT}^* & \text{với FG-V} \end{cases} \quad (8)$$

Tỷ phần thể tích tổng của CNT (V_{CNT}^*) được định nghĩa như sau [5, 6]:

$$V_{CNT}^* = \frac{w_{CNT}}{w_{CNT} + (\rho_{CNT}^m / \rho^m) - (\rho_{CNT}^m / \rho^m) w_{CNT}} \quad (9)$$

Trong biểu thức này, w_{CNT} là tỷ phần khối lượng của CNT, đại diện cho hàm lượng CNT trung bình trong dầm micro composite, trong khi ρ_{CNT}^m và ρ^m lần lượt là khối lượng riêng của CNT và nền polymer đẳng hướng. Các hệ số Poisson (ν_{12}^c và ν_{21}^c) cùng khối lượng riêng (ρ^c) của lõi FG-CNTRC không được hiệu chỉnh thông qua các hệ số hiệu quả CNT mà được xác định trực tiếp như sau [5, 6]:

$$\nu_{12}^c(z) = V_{CNT}(z) \nu_{12}^{CNT} + V_m(z) \nu^m \quad (10)$$

$$\nu_{21}^c(z) = \frac{\nu_{12}^c(z)}{E_{11}^c(z)} E_{22}^c(z) \quad (11)$$

$$\rho^c(z) = V_{CNT}(z) \rho^{CNT} + V_m(z) \rho^m \quad (12)$$

Trong đó, ν_{12}^{CNT} và ν^m lần lượt là hệ số Poisson của CNT và nền polymer, còn ρ^{CNT} và ρ^m biểu thị khối lượng riêng tương ứng của chúng. Các mô đun đàn hồi hiệu dụng và mô đun trượt của lõi FG-CNTRC được xác định như sau:

$$E^c(z) = \frac{E_{11}^c(z)}{1 - \nu_{12}^c(z) \nu_{21}^c(z)}, G^c(z) = G_{12}^c(z) \quad (13)$$

Lưu ý rằng trong nghiên cứu này, hệ tọa độ được lựa chọn với $z = 0$ tại mặt giữa hình học của dầm cho tất cả các dạng phân bố CNT nhằm đơn giản hóa quá trình xây dựng mô hình và tạo thuận lợi cho việc so sánh giữa các quy luật phân bố vật liệu. Đối với trường hợp phân bố bất đối xứng như FG-V, sự dịch chuyển của trục trung hòa không được xét tường minh và được xem như một giả thiết của mô hình hiện tại.

Đối với các lớp áp điện, quan hệ cấu thành điện-cơ tuyến tính được sử dụng dựa trên lý thuyết liên tục áp điện cổ điển, vốn được áp dụng rộng rãi trong mô hình hóa các kết cấu thông minh và thiết bị MEMS/NEMS [13-16]. Quan hệ liên hợp

giữa ứng suất và điện trường được biểu diễn như sau:

$$\sigma_{xx}^p = Q_{11}^p \varepsilon_{xx} - e_{31}^p E_z, \quad (14)$$

$$D_z^p = e_{31}^p \varepsilon_{xx} + \kappa_{33}^p E_z \quad (15)$$

trong đó, Q_{11}^p là hệ số độ cứng đàn hồi, e_{31}^p là hằng số áp điện, κ_{33}^p là hằng số điện môi của vật liệu áp điện, còn ε_{xx} là thành phần của ten xơ biến dạng. Dạng quan hệ này đã được sử dụng rộng rãi trong các mô hình dầm điện-áp điện-cơ học nhằm mô tả sự tương tác hai chiều giữa biến dạng cơ học và điện trường.

Trong nghiên cứu này, g_0 được định nghĩa là khoảng cách ban đầu từ điện cực cố định đến mặt dưới của vi dầm (lớp PZT dưới) ở trạng thái chưa biến dạng. Chuyển vị $w(x)$ là độ võng ngang của mặt tham chiếu $z = 0$ được chọn tại mặt giữa hình học của dầm micro. Do đó, khoảng cách tức thời giữa điện cực và dầm micro được biểu diễn bởi $g_0 - w(x)$.

Do các lớp áp điện được sử dụng như các cơ cấu chấp hành, điện thế được giả thiết được áp đặt từ bên ngoài theo chiều dày của mỗi lớp áp điện. Với giả thiết điện trường phân bố đều theo phương chiều dày, giả thiết thường được áp dụng đối với các lớp áp điện mỏng liên kết trên bề mặt — thành phần điện trường theo phương chiều dày có thể được biểu diễn như sau:

$$E_z = -\frac{V_p}{h_p} \quad (16)$$

trong đó, V_p là điện áp kích thích đặt vào lớp áp điện. Dấu âm cho thấy hướng của điện trường ngược với chiều dương của trục tọa độ theo phương chiều dày.

Áp suất tĩnh điện tác dụng lên bề mặt dưới của dầm micro được xác định như sau [13]:

$$q_{elec}(w) = \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2(g_0 - w)^2} \quad (17)$$

Trong biểu thức này, $\varepsilon \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ là hằng số điện môi của chân không.

Trong nghiên cứu này, lý thuyết dầm Euler-Bernoulli (EBT) được sử dụng để mô hình hóa ứng xử cơ học của dầm micro FG-CNTRC. Theo lý thuyết này, các mặt cắt ban đầu vuông góc với mặt

trung hòa vẫn duy trì tính thẳng và vuông góc với trục trung hòa đã biến dạng sau khi kết cấu bị biến dạng, do đó ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang được bỏ qua. Ngoài ra, hiệu ứng phụ thuộc kích thước của dầm micro được xét đến thông qua lý thuyết MCST. Trong khuôn khổ lý thuyết này, các thành phần chuyển vị của dầm micro được biểu diễn như sau:

$$u_x(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (18)$$

$$u_y(x, z, t) = 0 \quad (19)$$

$$u_z(x, z, t) = w(x, t) \quad (20)$$

Theo đó, các thành phần chuyển vị khác không của dầm micro có thể được biểu diễn như sau:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (21)$$

Các thành phần của véc tơ quay có thể được xác định như sau:

$$\theta_x = 0, \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}, \theta_z = 0. \quad (22)$$

Từ đó, ta xác định được các thành phần khác không của ten xơ độ cong đối xứng, như sau:

$$X_{xy} = X_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (23)$$

Trong nghiên cứu này, các phương trình chi phối được thiết lập chặt chẽ dựa trên nguyên lý Hamilton, vốn cung cấp một khuôn khổ biến phân thống nhất cho bài toán cân bằng động lực học. Theo nguyên lý cơ học giải tích cơ bản này, chuyển động thực của hệ cơ học giữa hai thời điểm tùy ý t_1 và t_2 sẽ làm cho biến phân bậc nhất của phiếm hàm tác dụng toàn phần đạt trạng thái dừng. Nói cách khác, hiệu giữa động năng và thế năng của hệ, được tích phân theo khoảng thời gian khảo sát, phải thỏa mãn điều kiện dừng. Về mặt toán học, nguyên lý Hamilton được biểu diễn như sau:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U_{elec} - \delta U_c - \delta U_p) dt = 0 \quad (24)$$

trong đó, U_{elec} , U_c và U_p lần lượt biểu thị công của ngoại lực, năng lượng biến dạng của lõi FG-CNTRC và năng lượng điện-cơ của các lớp áp điện. Năng lượng biến dạng của lõi FG-CNTRC trong khuôn khổ lý thuyết MCST được viết như sau:

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{V_c} (\sigma_{xx}^c \varepsilon_{xx} + 2m_{xy}^c \chi_{xy}) dV$$

$$= \int_0^L \int_{A_c} \left[\sigma_{xx}^c \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + m_{xy}^c \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dA dx \quad (25)$$

Đối với các lớp áp điện gắn trên bề mặt, năng lượng điện–cơ có thể được xác định như sau:

$$U_p = \int_{V_p} \left(\frac{1}{2} \sigma_{xx}^p \varepsilon_{xx} - \frac{1}{2} D_z E_z \right) dV \quad (26)$$

Do đó, biến phân của năng lượng biến dạng của lõi FG-CNTRC có thể được xác định như sau:

$$\delta U_c = \int_0^L \left[N_{xx}^c \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_{xx}^c \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + (Y_{xy}^c - M_{xx}^c) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] dx \quad (27)$$

Trong đó,

$$N_{xx}^c = \int_{A_c} \sigma_{xx}^c dA = A_{11}^c \frac{\partial u}{\partial x} - B_{11}^c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (28)$$

$$M_{xx}^c = \int_{A_c} z \sigma_{xx}^c dA = B_{11}^c \frac{\partial u}{\partial x} - D_{11}^c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (29)$$

$$Y_{xy}^c = \int_{A_c} m_{xy}^c dA = \int_{A_c} \mu^c(z) l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA = A_{13}^c l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (30)$$

với:

$$(A_{11}^c, B_{11}^c, D_{11}^c) = b \int_{-h/2}^{h/2} E^c(z) [1, z, z^2] dz, \quad (31)$$

$$A_{13}^c = b \int_{-h/2}^{h/2} G^c(z) z dz, \quad (32)$$

Biến phân ảo của năng lượng biến dạng của các lớp áp điện gắn trên bề mặt được xác định như sau:

$$\delta U_p = \int_0^L \left(N_{xx}^p \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_{xx}^p \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - M_{xx}^p \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) dx \quad (33)$$

trong đó:

$$N_{xx}^p = \int_{A_p} (Q_{11}^p \varepsilon_{xx} - e_{31}^p E_z) dA$$

$$= A_{11}^p \frac{\partial u}{\partial x} - B_{11}^p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_E^p \quad (34)$$

$$M_{xx}^p = \int_{A_p} (Q_{11}^p \varepsilon_{xx} - e_{31}^p E_z) z dA$$

$$= B_{11}^p \frac{\partial u}{\partial x} - D_{11}^p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_E^p \quad (35)$$

với:

$$(A_{11}^p, B_{11}^p, D_{11}^p) = \int_{A_p} Q_{11}^p (1, z, z^2) dA \quad (36)$$

$$(N_E^p, M_E^p) = \int_{A_p} E_z e_{31}^p (1, z) dA \quad (37)$$

Công ảo của ngoại lực do lực tĩnh điện được xác định như sau:

$$\delta U_{elec} = - \int_0^L q_{elec}(w) \delta w dx \quad (38)$$

Bằng cách thay thế các phương trình (27), (33) và (38) vào nguyên lý Hamilton (phương trình

(24)), sau đó thực hiện phép tích phân từng phần, các phương trình chuyển động của dầm micro FG-CNTRC điện–áp điện–cơ học dựa trên lý thuyết MCST có thể thu được bằng cách tập hợp các hệ số của các chuyển vị, như sau:

$$\frac{\partial N_{xx}^c}{\partial x} + \frac{\partial N_{xx}^p}{\partial x} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}^c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xx}^p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_{xy}^c}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^c \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xx}^p \frac{\partial w}{\partial x} \right) - q_{elec} = 0 \quad (40)$$

Các phương trình chi phối của dầm micro FG-CNTRC có lớp áp điện theo các biến chuyển vị có thể thu được bằng cách thay thế các phương trình (17), (28) – (30), (34) và (35) vào các phương trình (39) và (40), từ đó nhận được hệ phương trình chi phối như sau:

$$(A_{11}^c + A_{11}^p) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (B_{11}^c + B_{11}^p) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad (41)$$

$$(D_{11}^c + D_{11}^p + A_{13}^c l^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (B_{11}^c + B_{11}^p) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + N_E^p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2(g_0 - w)^2} \quad (42)$$

Phân tích trong nghiên cứu này được xây dựng dựa trên một số giả thiết đơn giản hóa, do đó có thể làm hạn chế khả năng áp dụng trong thực tế. Dầm micro FG-CNTRC có lớp áp điện được mô hình hóa như môi trường liên tục đồng nhất với các đặc tính vật liệu biến thiên trơn, trong khi hiện tượng kết tụ CNT và các khuyết tật vi cấu trúc chưa được xét đến. Ứng xử đàn hồi tuyến tính và giả thiết biến dạng nhỏ được sử dụng, do đó các phi tuyến hình học và phi tuyến vật liệu không được xem xét. Lý thuyết dầm Euler-Bernoulli được áp dụng dựa trên các giả thiết động học đơn giản hóa, điều này có thể làm giảm độ chính xác đối với các kết cấu có hình học cực đoan hoặc các quy luật biến thiên vật liệu phức tạp. Sự tương tác điện–áp điện–cơ học được mô tả thông qua các quan hệ cấu thành lý tưởng hóa, trong khi lực tĩnh điện được xây dựng dựa trên giả thiết bản cực song song lý tưởng, nên có thể chưa phản ánh đầy đủ ảnh hưởng của điện trường rìa trong thực tế. Ngoài ra, lý thuyết MCST chỉ sử dụng một tham số chiều dài vật liệu duy nhất để mô tả hiệu ứng kích thước,

do đó chưa xét đến các hiện tượng vi mô khác như hiệu ứng bề mặt và các tương tác vi cấu trúc chi tiết.

3. Nghiệm giải tích

Hiện tượng mất ổn định pull-in của dầm micro chịu kích thích tĩnh điện được biết là chủ yếu bị chi phối bởi độ võng ngang (w) do tính phi tuyến mạnh của lực tĩnh điện. Vì vậy, trong nghiên cứu này, một mô hình giảm bậc được sử dụng, trong đó đáp ứng chuyển vị ngang được xem là thành phần chi phối chính. Theo cách tiếp cận này, chuyển vị dọc trục (u) được giả thiết chỉ có ảnh hưởng thứ cấp đến hiện tượng mất ổn định pull-in và không được giải một cách tường minh. Thay vào đó, ảnh hưởng của nó được xét gián tiếp thông qua các hệ số độ cứng của mô hình. Ngoài ra, các quan hệ động học được đơn giản hóa bằng cách biểu diễn biến theo chuyển vị ngang, qua đó làm giảm số lượng biến độc lập nhưng vẫn bảo toàn được các đặc trưng cơ bản của biến dạng cắt.

Để thuận tiện cho quá trình trình bày và rút gọn các phương trình chi phối, các hệ số độ cứng tương đương sau đây được đưa vào:

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{11}^c + A_{11}^p, B_{11} = B_{11}^c + B_{11}^p \\ D_{11} &= D_{11}^c + D_{11}^p + A_{13}^c l^2 \end{aligned} \quad (43)$$

Trong nghiên cứu này, điều kiện biên hai đầu bản lè được xem xét. Để thu được nghiệm giải tích gần đúng, các trường chuyển vị được biểu diễn thông qua các hàm xấp xỉ thỏa mãn điều kiện biên như sau:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=1}^N U_n \cos(\alpha_n x) \\ w(x) &= \sum_{n=1}^N W_n \sin(\alpha_n x) \end{aligned} \quad (44)$$

Trong đó, $\alpha_n = n\pi/L$ là số nửa sóng, còn U_n và W_n là các hệ số chưa biết. Trong nghiên cứu hiện tại, chỉ mode dao động cơ bản ($N = 1$) được sử dụng trong quá trình tính toán. Do mục tiêu là khảo sát hiện tượng mất ổn định pull-in tĩnh, đáp ứng của dầm micro chủ yếu bị chi phối bởi mode cơ bản, trong khi ảnh hưởng của các mode cao hơn được xem là không đáng kể.

Bằng cách thay thế các nghiệm xấp xỉ (44) vào các phương trình chi phối (41) và (42), sau đó

áp dụng phương pháp Galerkin, thu được một hệ gồm hai phương trình đại số phi tuyến theo các hệ số biên độ U_m và W_m . Tiếp theo, ẩn U_m được khử khỏi hệ, dẫn đến phương trình đại số phi tuyến duy nhất theo W_m dưới dạng:

$$K_m W_m + F_m^{es} = 0 \quad (45)$$

trong đó hệ số độ cứng suy rộng tương ứng với mode thứ m (K_m) và thành phần lực tĩnh điện (F_m^{es}) được xác định như sau:

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{L}{2} \left[\left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \alpha_m^4 - N_E^p \alpha_m^2 \right] \\ F_m^{es} &= \int_0^L \frac{\epsilon_0 b V^2}{2(g_0 - w)^2} \sin(\alpha_m x) dx \end{aligned} \quad (46)$$

Cần lưu ý rằng thành phần lực tĩnh điện F_m^{es} phụ thuộc vào toàn bộ các tọa độ suy rộng W_n . Do đó, các phương trình mode liên kết phi tuyến với nhau thông qua tác dụng của lực tĩnh điện. Từ phương trình (45), hệ phương trình chi phối giảm bậc của hệ điện-áp điện-cơ học đa mode có thể được viết dưới dạng vector như sau:

$$R(W, V) = 0, \quad (47)$$

Trong đó $W = [W_1, W_2, \dots, W_N]^T$ là vector các tọa độ suy rộng, và phương trình dư ứng với mode thứ m được biểu diễn bởi:

$$R_m = K_m W_m + F_m^{es}(W, V) \quad (48)$$

Hệ phương trình đại số phi tuyến này được giải lặp bằng phương pháp Newton-Raphson. Ma trận Jacobi tương ứng được xác định như sau:

$$J_{mn} = K_m \delta_{mn} + \int_0^L \frac{\epsilon_0 b V^2}{(g_0 - w)^2} \sin(\alpha_m x) \sin(\alpha_n x) dx \quad (49)$$

trong đó δ_{mn} là ký hiệu delta-Kronecker.

Hiện tượng mất ổn định pull-in xảy ra khi quỹ đạo cân bằng của hệ mất tính ổn định. Về mặt toán học, điều kiện này đạt được khi ma trận Jacobi trở nên suy biến, tức là:

$$\det(J) = 0 \quad (50)$$

Cần nhấn mạnh rằng mô hình xấp xỉ đơn mode truyền thống có thể được xem là trường hợp đặc biệt của công thức hiện tại khi đặt $N = 1$. Khi đó, chuyển vị ngang của dầm micro được rút gọn thành:

$$w(x) = W \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (51)$$

Hệ phương trình chi phối suy biến thành mô hình pull-in cổ điển một bậc tự do.

4. Kết quả số và thảo luận

Trong phần này, các khảo sát số được thực hiện nhằm phân tích đặc tính mất ổn định pull-in do lực tĩnh điện của dầm micro FG-CNTRC tích hợp hai lớp áp điện. Ảnh hưởng của các dạng phân bố CNT, kích thích tĩnh điện, điện áp áp điện và các tham số hình học lên ứng xử điện–cơ của dầm micro FG-CNTRC được khảo sát và thảo luận một cách có hệ thống. Trong nghiên cứu này, polymethyl-methacrylate (PMMA) được sử dụng làm vật liệu nền polymer. Các đặc trưng vật liệu của PMMA như sau [5, 6]: $E^m=2.5\text{GPa}$, $\nu^m=0.3$. Ống nano carbon đơn vách (SWCNTs) armchair (10,10) được sử dụng làm vật liệu gia cường nhờ các đặc tính cơ học vượt trội của chúng. Các đặc trưng vật liệu hiệu dụng của SWCNTs như sau [5, 6]: $E_{11}^{\text{CNT}}=5646.6\text{ GPa}$, $E_{22}^{\text{CNT}}=7080\text{ GPa}$, $G_{12}^{\text{CNT}}=1944.5\text{ GPa}$, $\nu_{12}^{\text{CNT}}=0.175$. Để xác định chính xác các đặc tính cơ học tương đương của dầm micro FG-CNTRC, các tham số hiệu quả CNT (η_1, η_2, η_3) được đưa vào trong khuôn khổ quy luật hỗn hợp mở rộng. Các tham số hiệu quả này được hiệu chỉnh bằng cách đối sánh các dự đoán giải tích với kết quả mô phỏng động lực học phân tử [5, 6]. Các giá trị tham số hiệu quả CNT được sử dụng

tương ứng với các tỷ phần thể tích CNT khác nhau được tóm tắt như sau:

$$+) \eta_1=0.137, \eta_2=1.022, \eta_3=0.715$$

$$\text{với } V_{\text{CNT}}^*=0.12,$$

$$+) \eta_1=0.142, \eta_2=1.626, \eta_3=1.138$$

$$\text{với } V_{\text{CNT}}^*=0.17,$$

$$+) \eta_1=0.141, \eta_2=1.585, \eta_3=1.109$$

$$\text{với } V_{\text{CNT}}^*=0.28.$$

Trong nghiên cứu này, các lớp áp điện phía trên và phía dưới được giả thiết chế tạo từ vật liệu zirconate titanate chì (PZT), một trong những loại gốm áp điện được sử dụng phổ biến nhất trong các hệ vi cơ điện tử nhờ khả năng liên hợp điện–cơ vượt trội. Các đặc trưng vật liệu của lớp PZT được sử dụng trong nghiên cứu này được tham khảo từ các tài liệu công bố trước đây và được cho như sau (xem Tài liệu [18]): $C_{11}=132\text{GPa}$, $\nu_p=0.3$, $e_{31}=-4.1\text{C/m}^2$.

Để kiểm chứng độ chính xác và độ tin cậy của mô hình điện–cơ hiện tại, việc kiểm chứng đã được thực hiện thông qua việc so sánh với kết quả đã công bố trong tài liệu tham khảo. Quá trình kiểm chứng bao gồm phân tích đặc tính mất ổn định pull-in dưới các trường hợp giới hạn khác nhau. Các kết quả pull-in của dầm micro FG được so sánh với nghiên cứu của Lê và cộng sự [17], như trình bày trong Bảng 1.

Bảng 1. So sánh điện thế pull-in $V_{\text{PI}}(\text{V})$ của dầm micro FG

Tham số vật liệu (k)	Nguồn	$l/h=0.25$	$l/h=0.5$	$l/h=0.75$	$l/h=1$
0.5	Tài liệu [17]	32.5	42.8	55.9	70.2
	Bài báo	31.9	42.2	55.3	69.7
1.0	Tài liệu [17]	36.4	48.4	63.7	80.0
	Bài báo	36.1	48.1	63.1	79.7
5.0	Tài liệu [17]	44.2	58.6	76.9	97.0
	Bài báo	44.0	58.1	76.3	96.5

Trong công trình này, các tác giả đã phát triển mô hình phần tử hữu hạn (FEM) dựa trên lý thuyết MCST nhằm khảo sát hiện tượng mất ổn định pull-in phụ thuộc kích thước của dầm micro FG chịu kích thích tĩnh điện.

Kết quả so sánh cho thấy mô hình hiện tại dự đoán điện thế pull-in V_{PI} có độ phù hợp rất tốt với

các kết quả FEM được báo cáo trong tài liệu tham khảo, chỉ xuất hiện sai khác rất nhỏ. Điều này khẳng định độ chính xác của mô hình Galerkin được đề xuất, đồng thời xác minh tính đúng đắn của việc mô hình hóa lực tĩnh điện phi tuyến cũng như hiệu ứng phụ thuộc kích thước được đưa vào thông qua lý thuyết MCST.

Các kết quả số được trình bày trong phần dưới đây nhằm khảo sát đặc tính mất ổn định pull-in do lực tĩnh điện của dầm micro FG-CNTRC dựa trên lý thuyết MCST. Đặc biệt, nghiên cứu tập trung phân tích ảnh hưởng cấu hình hình học, quy luật phân bố CNT, tỷ phần thể tích CNT và các tham số phụ thuộc kích thước lên đặc tính mất ổn định pull-in của hệ. Trừ khi có phát biểu khác, các đặc trưng vật liệu và kích thước hình học được giữ không đổi trong toàn bộ quá trình mô phỏng số nhằm đảm bảo tính nhất quán khi so sánh giữa các trường hợp tham số khác nhau. Cụ thể, chiều dày và chiều rộng của dầm micro FG-CNTRC được giả thiết không đổi trong toàn bộ các khảo sát số, với $h = 1 \mu\text{m}$, $b=h$. Các kích thước này được lựa chọn nhằm đại diện cho các cấu trúc microbeam điển hình thường được sử dụng trong các ứng dụng MEMS. Trong khi đó, chiều dài dầm và các tham số hình

học khác được thay đổi để khảo sát ảnh hưởng của cấu hình hình học lên đặc tính mất ổn định pull-in của hệ.

Điện thế pull-in V_{PI} của dầm micro FG-CNTRC được trình bày trong Bảng 2 ứng với các giá trị khác nhau của tỷ số độ mảnh L/h , tỷ phần thể tích CNT V_{CNT}^* và điện áp áp điện đặt vào V_p . Các kết quả cho thấy rõ ràng những tham số này có ảnh hưởng đáng kể đến đặc tính mất ổn định pull-in của hệ dầm micro được đề xuất.

Có thể quan sát từ Bảng 2 rằng điện thế pull-in tăng đáng kể khi tỷ phần thể tích V_{CNT}^* tăng. Hiện tượng này chủ yếu xuất phát từ sự gia tăng độ cứng hiệu dụng của dầm micro FG-CNTRC do hiệu quả gia cường của ống nano-carbon trở nên mạnh hơn. Khi độ cứng kết cấu tăng lên, cần một điện áp kích thích tĩnh điện lớn hơn để gây ra hiện tượng mất ổn định pull-in.

Bảng 2. Điện thế pull-in $V_{PI}(V)$ của dầm micro FG-CNTRC ($g_0=2h$, $h_p=0.1h$, $l=0.1h$)

V_{CNT}^*	V_p	L/h=40				L/h=50			
		UD	FG-X	FG-O	FG-V	UD	FG-X	FG-O	FG-V
0.12	0	394.1	439.1	343.1	369.1	252.2	281.0	219.6	236.2
	1	377.3	424.1	323.7	351.2	235.2	265.9	199.9	218.0
	2	359.7	408.6	303.1	332.2	216.9	249.8	178.0	198.1
	3	341.3	392.4	281.0	312.2	196.9	232.7	152.9	176.0
	4	321.8	375.6	256.9	290.7	174.6	214.1	122.9	150.6
	5	301.0	357.9	230.4	267.5	149.0	193.8	82.6	120.0
0.17	0	436.6	495.7	368.1	400.5	279.4	317.3	235.6	256.3
	1	421.5	482.5	350.1	384.0	264.2	303.9	217.3	239.6
	2	405.9	468.9	331.1	366.8	248.0	290.0	197.3	221.7
	3	389.6	454.9	310.9	348.7	230.7	275.3	175.1	202.1
	4	372.6	440.4	289.4	329.6	212.0	259.9	149.6	180.5
	5	354.9	425.5	266.1	309.4	191.5	243.4	118.7	155.9
0.28	0	510.6	592.3	412.9	455.6	326.8	379.1	264.3	291.6
	1	497.7	581.3	397.0	441.2	313.8	368.0	248.1	277.0
	2	484.5	570.1	380.3	426.3	300.3	356.6	230.8	261.7
	3	471.0	558.6	362.9	410.8	286.2	344.8	212.2	245.3
	4	457.1	546.9	344.6	394.7	271.4	332.5	191.6	227.8
	5	442.7	534.9	325.3	378.0	255.7	319.8	168.7	208.9

Đối với mỗi giá trị của tỷ phần thể tích CNT V_{CNT} , điện thế pull-in tuân theo thứ tự:

$$FG-O < FG-V < UD < FG-X$$

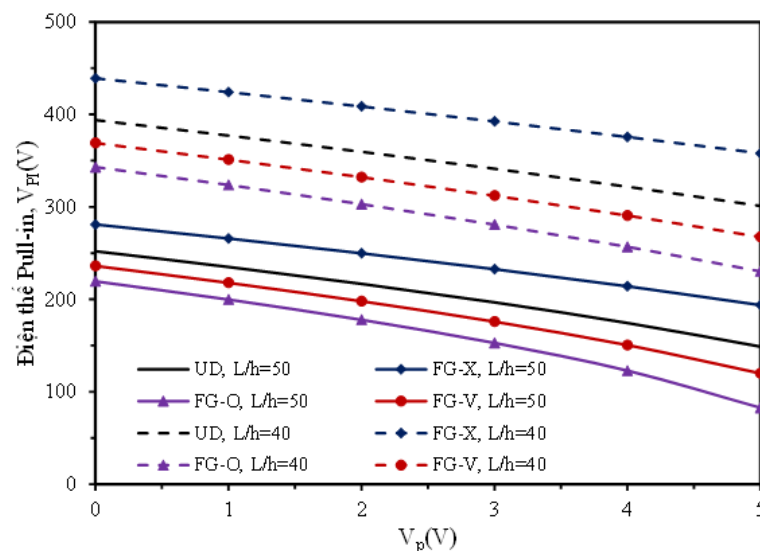
Xu hướng này có thể được giải thích thông qua sự khác biệt trong quy luật phân bố CNT theo chiều dày của dầm micro. Cấu hình FG-X cho giá trị điện thế pull-in lớn nhất do phần lớn CNT tập trung gần hai bề mặt trên và dưới của dầm micro, là những vùng xuất hiện ứng suất uốn lớn nhất. Vì vậy, độ cứng chống uốn của dầm micro được tăng cường đáng kể, làm tăng khả năng chống lại hiện tượng mất ổn định do lực tĩnh điện. Ngược lại, cấu hình FG-O cho giá trị điện thế pull-in nhỏ nhất do CNT chủ yếu tập trung quanh mặt trung hòa, nơi ứng suất uốn tương đối nhỏ. Do đó, hiệu quả gia cường của CNT đối với độ cứng chống uốn không phát huy tối đa, khiến dầm micro dễ xảy ra hiện tượng mất ổn định pull-in hơn. Trong khi đó, các cấu hình UD và FG-V cho đáp ứng trung gian giữa hai trường hợp cực trị này.

Bảng 2 cũng cho thấy điện thế pull-in V_{PI}

giảm đáng kể khi tỷ số độ mảnh L/h tăng. Về mặt vật lý, khi chiều dài dầm micro tăng lên, độ cứng chống uốn tổng thể của kết cấu giảm xuống, làm cho dầm micro trở nên mềm hơn và do đó dễ bị sụp đổ tĩnh điện ở các mức điện áp thấp hơn.

Ngoài ra, có thể nhận thấy rằng điện thế pull-in V_{PI} giảm khi điện áp áp điện V_p tăng. Nguyên nhân là do lực dọc trục sinh ra bởi hiệu ứng áp điện tạo ra tác dụng làm mềm bổ sung đối với dầm micro, làm giảm độ cứng hiệu dụng của kết cấu và thúc đẩy hiện tượng mất ổn định pull-in xảy ra sớm hơn. Kết quả là hiện tượng sụp đổ tĩnh điện xuất hiện tại giá trị điện áp kích thích thấp hơn.

Sự biến thiên của điện thế pull-in V_{PI} theo điện áp áp điện đặt vào V_p cũng có thể được quan sát rõ trong Hình 3. Có thể thấy rằng điện thế pull-in V_{PI} giảm dần khi điện áp áp điện V_p tăng lên. Hiện tượng này xuất phát từ lực dọc trục sinh ra bởi hiệu ứng áp điện, làm suy giảm độ cứng hiệu dụng của dầm micro FG-CNTRC và do đó thúc đẩy hiện tượng mất ổn định tĩnh điện xảy ra sớm hơn.



Hình 3. Điện thế pull-in V_{PI} , ($g_0=2h$, $l=0.1h$, $h_p=0.1h$, $V_{CNT}^*=0.12$)

Ảnh hưởng của quy luật phân bố CNT thể hiện rõ rệt đối với mọi giá trị V_p được khảo sát. Trong số các dạng phân bố được xét, dầm micro với phân bố FG-X luôn cho giá trị điện thế pull-in lớn nhất nhờ độ cứng chống uốn vượt trội, trong khi cấu hình FG-O cho giá trị điện thế pull-in nhỏ nhất do hiệu quả gia cường tương đối yếu tại các

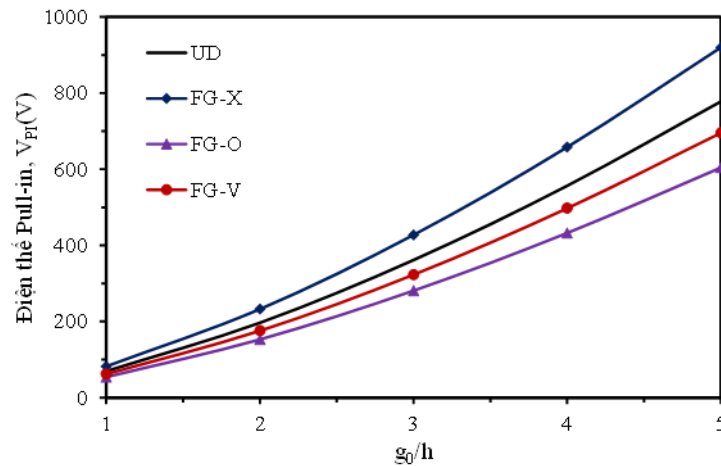
vùng ứng suất lớn gần bề mặt của dầm micro.

Hình 4 minh họa ảnh hưởng của tỷ số khe hở ban đầu g_0/h lên điện thế pull-in V_{PI} của dầm micro FG-CNTRC ứng với các dạng phân bố CNT khác nhau. Có thể quan sát thấy rằng V_{PI} tăng đáng kể khi g_0/h tăng đối với tất cả các trường hợp khảo sát. Hiện tượng này là hoàn toàn phù hợp về mặt

vật lý, bởi khi khe hở ban đầu lớn hơn, lực hút tĩnh điện giữa các điện cực sẽ suy giảm, do đó cần một điện áp kích thích lớn hơn để gây ra hiện tượng mất ổn định pull-in.

Ngoài ra, mối quan hệ giữa V_{PI} và g_0/h thể hiện tính phi tuyến rõ rệt, trong đó tốc độ gia tăng của điện thế pull-in trở nên đáng kể hơn tại các giá trị khe hở lớn. Trong số các dạng phân bố CNT được xét, cấu hình FG-X luôn cho giá trị điện thế

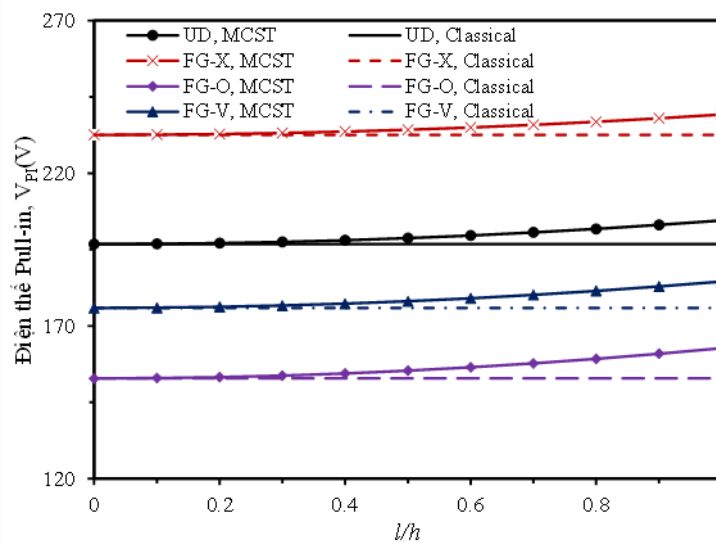
pull-in lớn nhất, tiếp theo là các cấu hình UD và FG-V, trong khi cấu hình FG-O cho giá trị V_{PI} nhỏ nhất. Xu hướng này cho thấy dạng phân bố FG-X mang lại hiệu quả tăng cường độ cứng kết cấu lớn nhất, từ đó nâng cao khả năng chống lại hiện tượng sụp đổ tĩnh điện. Ngược lại, cấu hình FG-O dẫn đến độ cứng chống uốn tương đối thấp hơn, khiến dầm micro dễ xảy ra hiện tượng mất ổn định pull-in hơn dưới tác dụng của tải trọng tĩnh điện.



Hình 4. Điện thế pull-in V_{PI} , ($l=0.1h$, $L=50h$, $h_p=0.1h$, $V_p=3V$, $V_{CNT}^*=0.12$)

Hình 5 trình bày sự biến thiên của điện thế pull-in V_{PI} theo tỷ số chiều dài vật liệu không thứ nguyên l/h đối với các dạng phân bố CNT khác nhau dựa trên cả lý thuyết cổ điển và lý thuyết MCST. Có thể nhận thấy rằng V_{PI} tăng dần khi l/h

tăng trong mô hình MCST, trong khi mô hình cổ điển dự đoán các giá trị gần như không đổi. Sự khác biệt này cho thấy vai trò quan trọng của hiệu ứng phụ thuộc kích thước được mô tả bởi lý thuyết MCST, đặc biệt tại các giá trị l/h lớn.



Hình 5. Điện thế pull-in V_{PI} , ($g_0=2h$, $L=50h$, $h_p=0.1h$, $V_p=3V$, $V_{CNT}^*=0.12$)

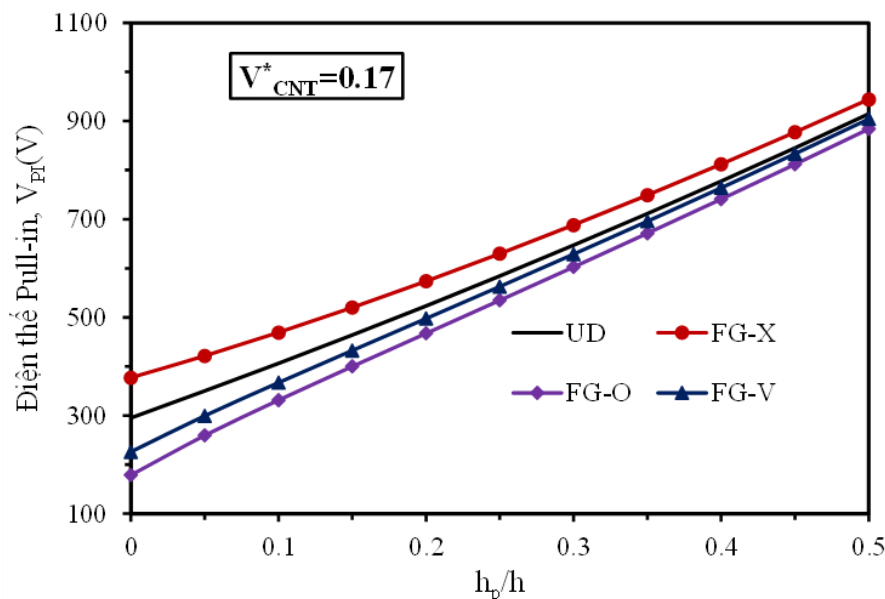
Sự gia tăng của V_{PI} có thể được giải thích bởi độ cứng bổ sung sinh ra từ tham số chiều dài vật

liệu trong khuôn khổ lý thuyết MCST, làm tăng khả năng chống lại hiện tượng mất ổn định tĩnh điện

của dầm micro. Độ chênh lệch giữa kết quả MCST và lý thuyết cổ điển trở nên rõ rệt hơn khi l/h tăng, cho thấy lý thuyết liên tục cổ điển có xu hướng đánh giá thấp điện thế pull-in ở cấp vi mô.

Hình 6 minh họa ảnh hưởng của tỷ số chiều dày lớp áp điện h_p/h lên điện thế pull-in V_{PI} của dầm micro FG-CNTRC đối với các dạng phân bố CNT khác nhau tại $V_p = 0$. Có thể quan sát rõ rằng V_{PI} tăng gần như tuyến tính khi h_p/h tăng trong tất cả

các trường hợp khảo sát. Hiện tượng này chủ yếu xuất phát từ sự gia tăng độ cứng điện–cơ do các lớp áp điện dày hơn mang lại, qua đó nâng cao khả năng chống lại lực hút tĩnh điện của kết cấu và làm trì hoãn sự xuất hiện của hiện tượng mất ổn định pull-in. Ngoài ra, xu hướng gần như song song của các đường cong cho thấy sự gia tăng chiều dày lớp áp điện ảnh hưởng đến tất cả các dạng phân bố CNT theo cách tương đối tương đồng.



Hình 6. Điện thế pull-in V_{PI} , ($g_0=2h$, $L=40h$, $l=0.2h$, $V_p=2V$, $V_{CNT}^*=0.17$)

5. Kết luận

Trong nghiên cứu này, hiện tượng mất ổn định pull-in của dầm micro FG-CNTRC tích hợp các lớp áp điện đã được khảo sát dựa trên lý thuyết MCST kết hợp với lý thuyết EBT. Các phương trình chi phối được thiết lập thông qua nguyên lý Hamilton và được giải bằng phương pháp Galerkin. Các kết quả số thu được cho thấy rằng:

- Điện thế pull-in V_{PI} tăng đáng kể khi tỷ phần thể tích CNT V_{CNT}^* , tỷ số chiều dài vật liệu l/h , tỷ số khe hở ban đầu g_0/h và tỷ số chiều dày lớp áp điện h_p/h tăng. Ngược lại, điện thế pull-in giảm khi điện áp áp điện V_p tăng do hiệu ứng làm mềm điện–cơ gây ra bởi kích thích áp điện.

- Quy luật phân bố CNT có ảnh hưởng quan trọng đến đặc tính ổn định pull-in của dầm micro. Trong tất cả các dạng phân bố được khảo sát, cấu hình FG-X luôn cho giá trị điện thế pull-in lớn nhất,

trong khi cấu hình FG-O cho giá trị nhỏ nhất. Kết quả này khẳng định rằng việc tập trung CNT gần hai bề mặt trên và dưới của dầm micro mang lại hiệu quả gia cường độ cứng tối ưu.

Nhìn chung, nghiên cứu hiện tại cho thấy việc kết hợp vật liệu FG-CNTRC, kích thích áp điện và các lý thuyết liên tục ở cấp vi mô là một hướng tiếp cận hiệu quả nhằm điều chỉnh và cải thiện đặc tính pull-in của các thiết bị MEMS/NEMS dựa trên mô hình dầm micro.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số **107.02-2023.03**

Tuyên bố về việc sử dụng AI tạo sinh

Trong quá trình chuẩn bị bài báo này, các tác giả không sử dụng các công cụ AI để hỗ trợ. Các tác giả chịu hoàn toàn trách nhiệm về nội dung của

bài báo được công bố.

Tài liệu tham khảo

- [1] I.W. Judy. (2001). Microelectromechanical systems (MEMS): fabrication, design and applications. *Smart Materials and Structures*, 10(6), 1115-1134. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/6/301>
- [2] H. Amara, N.T. Beigh, N. Alcheikh. (2025). Smart resonant micro-sensor and micro-actuator: high-performance, wide range bi-axial magnetic sensitive/ insensitive micro-device for multifunctional sensing applications. *Microsystems and Nanoengineering*, 11, 174. <https://doi.org/10.1038/s41378-025-01041-y>
- [3] R.M.C. Mestrom, R.H.B. Fey, J.T.M. van Beek, K.L. Phan, H. Nijmeijer. (2008). Modelling the dynamics of a MEMS resonator: Simulations and experiments. *Sensors and Actuators A: Physical*, 142(1), 306-315. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2007.04.025>
- [4] W.M. Zhang, H. Yan, Z.K. Peng, G. Meng. (2014). Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review. *Sensors and Actuators A: Physical*, 214, 187-218. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2014.04.025>
- [5] S.K. Soni, B. Thomas, A. Swain, T. Roy. (2022). Functionally graded carbon nanotubes reinforced composite structures: An extensive review. *Composite Structures*, 299, 116075. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116075>
- [6] K.M. Liew, Z.X. Lei, L.W. Zhang. (2015). Mechanical analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composites: A review. *Composite Structures*, 120, 90-97. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.041>
- [7] J.S. Stölken, A.G. Evans. (1998). A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Materialia*, 46(14), 5109-5115. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(98\)00153-0](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(98)00153-0)
- [8] C. Tang, G. Alici. (2011). Evaluation of length-scale effects for mechanical behaviour of micro-and nanocantilevers: I. Experimental determination of length-scale factors. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 44(33), 335501. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/44/33/335501>
- [9] D. Zhang, J.M. Breguet, R. Clavel, L. Philippe, I. Utke, J. Michler. (2009). In situ tensile testing of individual Co nanowires inside a scanning electron microscope. *Nanotechnology*, 20, 365706. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/20/36/365706>
- [10] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong. (2002). Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10), 2731-2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
- [11] S. Kong. (2022). A review on the size-dependent models of micro-beam and micro-plate based on the modified couple stress theory. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 29, 1-31. <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09567-w>
- [12] B.G. Phi, D.V. Hieu, H.M. Sedighi, A.H. Sofiyev. (2022). Size-dependent nonlinear vibration of functionally graded composite micro-beams reinforced by carbon nanotubes with piezoelectric layers in thermal environments. *Acta Mechanica*, 233, 2249-2270. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03224-4>
- [13] M. Ahmadi, R. Ansari, H. Rouhi. (2019). On the free vibrations of piezoelectric carbon nanotube-reinforced microbeams: a multiscale finite element approach. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 43, 285-294. <https://doi.org/10.1007/s40997-018-0157-x>
- [14] H.R.B. Dehkordi, Y.T. Beni. (2023). Size-dependent coupled bending-torsional

- vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced composite Timoshenko microbeams. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 23, 186. <https://doi.org/10.1007/s43452-023-00725-4>
- [15] M.B. Dehkordi, Y.T. Beni, A. Cheraghbak. (2024). On the nonlocal nonlinear vibration of electro-magneto piezoelectric porous visco-microbeam reinforced with agglomerated CNTs considering surface effects. *Applied Physics A*, 130, 910. <https://doi.org/10.1007/s00339-024-08048-8>
- [16] W.D. Yang, C.Q. Fang, X. Wang. (2017). Nonlinear dynamic characteristics of FGCNTs reinforced microbeam with piezoelectric layer based on unifying stress-strain gradient framework. *Composites Part B: Engineering*, 111, 372-386. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.11.058>
- [17] C.I. Le, V.N. Pham, D.K. Nguyen. (2023). Size dependent pull-in instability of functionally graded microbeams using a finite element formulation. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 1289, 012028. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1289/1/012028>
- [18] Y.F. Liu, Y.Q. Wang. (2019). Thermo-Electro-Mechanical Vibrations of Porous Functionally Graded Piezoelectric Nanoshells. *Nanomaterials*, 9, 301. <https://doi.org/10.3390/nano9020301>