

## Nonlinear vibration of Micro beams under electrostatic force

Thanh Huong Thi Dong

University of Transport Technology, Hanoi, Vietnam

### Article info

#### Type of article:

Original research paper

#### \*Corresponding author:

E-mail address:

huongdtt@utt.edu.vn

**Received:** 10/11/2022

**Accepted:** 27/12/2022

**Published:** 10/3/2023

**Abstract:** in this work, we study nonlinear oscillations of Micro beams based on the nonlocal theory (NGT) incorporated the thickness effect and the Euler–Bernoulli beam theory (EBT) with the Von Karman’s assumption. Consider a clamped–clamped micro beam placed between two stationary electrodes. We will apply the variational approach to find the approximate solution of the nonlinear compare with results in studies to evaluate the accuracy of the method. Effects of material, of a voltage and operational parameters on the frequency ratio (the ratio of nonlinear frequency to linear frequency), on the nonlinear frequency, and on the stable configuration of the micro beam are studied and discussed.

**Keywords:** Microbeam, Nonlocal theory, Nonlinear oscillator, Homotopy perturbation method.

## Phân tích dao động phi tuyến của dầm kích thước micro dưới tác dụng của điện trường

Đồng Thị Thanh Hương

Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, Hà Nội, Việt Nam

### Thông tin bài viết

#### Dạng bài viết:

Bài báo nghiên cứu

#### Tác giả liên hệ:

Địa chỉ E-mail:

huongdt@utt.edu.vn

Ngày nộp bài: 10/11/2022

Ngày chấp nhận: 27/12/2022

Ngày đăng bài: 10/3/2023

**Tóm tắt:** Trong nghiên cứu này, Nhóm tác giả nghiên cứu dao động phi tuyến của dầm có kích thước Micro dưới tác dụng của điện trường dựa trên lý thuyết độ dốc biến dạng phi địa phương (NSGT) và lý thuyết dầm Euler-Bernouli (EBL) với giả thiết Von-Karman. Dầm micro bị ngàm hai đầu và đặt giữa hai bản tích điện áp cố định. Nhóm tác giả sử dụng phương pháp gần đúng biến phân so sánh với các kết quả trong các nghiên cứu để đánh giá chính xác của phương pháp. Đánh giá ảnh hưởng của kích thước và các tham số động học, điện áp đến tần số dao động của dầm micro dưới tác dụng của điện trường được xem xét và thảo luận.

**Từ khóa:** Dầm micro, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, dao động phi tuyến, phương pháp biến phân.

### 1. Giới thiệu

Thiết bị truyền động vi mô / nano là bộ phận chính của hệ thống cơ điện tử vi mô / nano (MEMS / NEMS). Bộ truyền động vi mô thường được mô hình hóa như một dầm micro hoặc tấm micro được điều khiển bởi lực tĩnh điện gây ra bởi điện áp đặt giữa dầm micro (hoặc tấm micro) và chất nền cố định. Các thiết bị MEMS / NEMS bao gồm công tắc micro / nano, thiết bị truyền động micro / nano, cảm biến,... có rất nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực công nghệ cao như điện tử kỹ thuật, kỹ thuật hàng không vũ trụ, kỹ thuật y sinh, kỹ thuật quang học (Batra và cộng sự [1]; Chuang và cộng sự [2]). Các bài toán dao động và mất ổn định của MEMS / NEMS đã được nhiều tác giả nghiên cứu. Zhang và Meng [3] đã nghiên cứu đáp ứng phi tuyến động học của MEMS chịu tác dụng của lực tĩnh điện và lực giảm chấn. Nemirovsky và Degani [4] đã nghiên cứu hiện tượng mất ổn định của bộ điều khiển tĩnh điện. Biểu thức phân tích cho lực điện áp gây ra giữa hai bản tụ trong thiết bị điều khiển có kích thước micro đưa ra bởi Lee [5]. Krylov và

Dick [6] đã báo cáo các nghiên cứu lý thuyết và số học về sự mất ổn định động cho mode đầu tiên do lực tĩnh điện và lực phân bố đều. Fu và Zhang [7] đã nghiên cứu các hiện tượng mất ổn định của dầm nano dưới tác dụng của điện trường khi xem xét ảnh hưởng của năng lượng bề mặt. Phương pháp nhiễu loạn đồng loạn đã được Askari và cộng sự [8] sử dụng để khảo sát đặc tính ổn định tĩnh của dầm micro / nano với các loại điều kiện biên khác nhau dưới lực tĩnh điện, lực tương tác Van der Waals và Casimir.

Các nghiên cứu đã chỉ ra rằng lý thuyết cơ giãn cổ điển (CET) không phù hợp để mô tả hành vi cơ học cấu trúc micro/ nano. Đối với cấu trúc micro / nano, hiệu ứng phụ thuộc vào kích thước đóng một vai trò quan trọng trong hành vi cơ học của cấu trúc (Fleck và cộng sự [9]; Stolken và Evans [10]; Chong và cộng sự [11]). Một số lý thuyết đàn hồi bậc cao có thể mô tả các tác động phụ thuộc vào kích thước đã được phát triển như lý thuyết đàn hồi phi địa phương (NET) được đề xuất bởi Eringen [12], Eringen và Edelen [13], lý

thuyết gradient biến dạng (SGT) đã phát triển bởi Mindlin [14] và sau đó được sửa đổi bởi Aifantis [15]. Với việc xem xét ứng suất tại một điểm của vật thể liên tục không chỉ phụ thuộc vào biến dạng tại điểm đó mà còn vào biến dạng ở tất cả các điểm khác, NET cho thấy tác động làm mềm thông qua các tham số phi địa phương. Trái ngược với NET, SGT phản ánh hiệu ứng cứng của các cấu trúc phụ thuộc vào kích thước thông qua các tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu. Một số phiên bản sửa đổi của SGT đã được đề xuất như lý thuyết ứng suất cặp đôi (CST) (Lam et al. [16]) với hai tham số thang đo chiều dài vật liệu được xem xét và lý thuyết ứng suất cặp điều hòa (MCST) (Yang và cộng sự [17]) với chỉ một tham số thang đo chiều dài vật liệu sẽ được tích hợp. Dao động phi tuyến và bài toán ổn định của dầm nano chịu tác động của lực tĩnh điện đã được nghiên cứu bởi Kivi và cộng sự [18], sử dụng MSGT và EBT. Dựa trên MCST, Shen và cộng sự [19] đã nghiên cứu đường cong mất ổn định của dầm Euler – Bernoulli kích thước micro được ghép nhiều lớp chịu tác động của tĩnh điện và áp điện. Nikpourian và cộng sự [20] đã nghiên cứu đáp ứng phi tuyến hình học của dầm micro dưới tác dụng của lực tĩnh điện và áp điện bằng cách sử dụng SGT. Kết hợp NET và SGT thành một lý thuyết đàn hồi tổng quát, Lim và các cộng sự [21] đã đề xuất NSGT, có thể được coi là lý thuyết đàn hồi bậc cao và tổng quát nhất cho đến nay. Có thể quan sát ảnh hưởng của các tham số thang đo chiều dài vật liệu và phi địa phương lên ứng xử cơ học của các cấu trúc phụ thuộc vào kích thước bằng cách sử dụng lý thuyết này. Dựa trên NSGT, một số công trình liên quan đến tĩnh và động của dầm micro / nano đã được xuất bản. Simsek [22] đã nghiên cứu dao động phi tuyến của dầm nano FG Euler – Bernoulli bằng cách sử dụng phương pháp tiếp cận Hamilton. Bài toán buckling và dao động phi tuyến của dầm nano nằm trên một lớp đàn hồi đã được nghiên cứu bởi Hieu [23] bằng cách sử dụng phương pháp tuyến tính hóa tương đương. Dao động phi tuyến phụ thuộc vào kích thước của dầm micro FG được gia cố bằng ống

nano cacbon với các lớp áp điện trong môi trường nhiệt được nghiên cứu bởi Phi và các cộng sự [24]. Hieu và Phi [25] nghiên cứu dao động phi tuyến của dầm nano khảo sát ảnh hưởng của kích thước hình học.

Theo hiểu biết của nhóm tác giả, khảo sát dao động phi tuyến của dầm micro dưới tác dụng của trường điện từ theo lý thuyết NSGT là một hướng nghiên cứu tốt. Do đó, trong nghiên cứu này tác giả tiến hành nghiên cứu dao động phi tuyến của dầm micro được kẹp giữa hai bản tụ đặt điện áp một chiều, sử dụng phương pháp Galerskin và phương pháp biến phân He’Laplace so sánh kết quả tính toán với các công trình nghiên cứu khác cho thấy độ chính xác của kết quả thu được. Đánh giá ảnh hưởng của các tham số độ mảnh, tham số phi cục bộ, điện áp đến dao động của dầm micro.

## 2. Mô hình và công thức

Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ (Eringen, 1972) liên quan đến tương tác tầm xa giữa các hạt vật liệu đàn hồi đẳng hướng đồng nhất, thì ứng suất tại điểm không chỉ phụ thuộc vào biến dạng tại vị trí đó mà còn phụ thuộc vào tất cả biến dạng tại các điểm khác trong miền thể tích  $V$ . Với giả thiết này thì thể năng biến dạng đàn hồi viết dưới dạng:

$$U(\varepsilon_{ij}, \varepsilon'_{ij}, \alpha_0) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \int_V \alpha_0(|x-x'|, \xi_0 \kappa) \varepsilon'_{kl} dV(x') \quad (1)$$

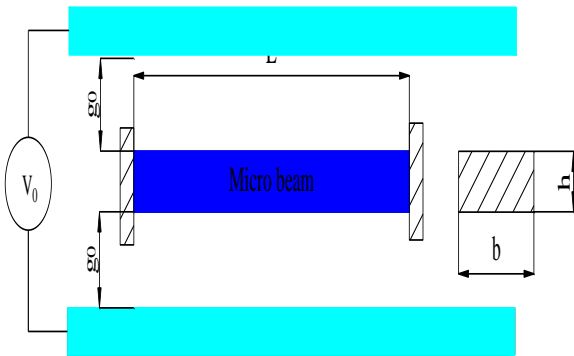
ở đó  $\varepsilon_{ij}, \varepsilon'_{ij}$  là tenxơ biến dạng tại điểm  $x$  và  $x'$ ,  $C_{ijkl}$  là tenxơ đàn hồi theo lý thuyết cổ điển,  $\xi_0$  là hằng số không địa phương của vật liệu,  $\kappa$  đặc trưng chiều dài nội bộ và  $\alpha_0$  hàm biến thiên Kernel thể hiện tính không địa phương theo khoảng cách giữa điểm tính  $x$  và điểm lân cận  $x'$  trong miền thể tích  $V$ . Mô hình phi địa phương trong phương trình (1) giải thích ảnh hưởng của tính không địa phương đến trường biến dạng cổ điển. Nếu chúng ta mở rộng mô hình của Eringen bao gồm cả tính phi địa phương của độ dốc biến dạng (strain gradients)  $\varepsilon_{ij,k}$ . Đưa ra một hàm Kernel mới thì ta có thể năng biến dạng đàn hồi có dạng:

$$\begin{aligned}
 & U(\varepsilon_{ij}, \varepsilon'_{ij}, \alpha_0, \varepsilon_{ij,m}, \varepsilon'_{ij}, m, \alpha_1) \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \int_V \alpha_0 (|x-x'|, \xi_0, \kappa) \varepsilon'_{kl} dV(x') \\
 &+ \frac{l^2}{2} \varepsilon_{ij,m} C_{ijkl} \int_V \alpha_1 (|x-x'|, \xi_1, \kappa) \varepsilon'_{kl,m} dV(x')
 \end{aligned} \tag{2}$$

Khi giả thiết:  $\xi_0 = \xi_1 = \xi$  phương trình NSGT có thể viết lại như sau (Lim và cộng sự 2015):

$$[1 - e^2 \nabla^2] \sigma_{ij} = C_{ijkl} (1 - l^2 \nabla^2) \varepsilon_{kl} \tag{3}$$

Trong công thức (3) khi  $e=0$  ta thu được lý thuyết gradient biến dạng (Aifantis strain gradient mode); khi  $l=0$  thu được lý thuyết đàn hồi không địa phương (Erigen nonlocal stress mode).



Hình 1. Mô hình dầm micro đặt giữa hai bản tích điện

Một dầm micro với hai đầu ngàm được đặt giữa hai bản tích điện như Hình 1. Dầm micro có chiều dài  $L$ , kích thước mặt cắt ngang  $b \times h$ , mật độ khối lượng  $\rho$ , mô đun đàn hồi Young  $E$  và mômen quán tính của mặt cắt ngang  $I$ . khoảng cách giữa hai bản tích điện đến dầm micro là  $g_0$ , một dòng điện với điện thế  $V_0$  tác dụng lên bản tích điện

Phương trình chuyển động của dầm micro được xây dựng dựa trên nguyên lý Hamiton. Theo lý thuyết dầm Euler – Bernoulli và giả thiết Von-Kármán, thành phần khác không của tensor biến dạng được cho bởi:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \tag{4}$$

Theo lý thuyết độ dốc biến dạng phi địa phương, năng lượng biến dạng ảo của dầm micro

được cho bởi:

$$\begin{aligned}
 \delta U_s &= \int_V (\sigma_{xx}^{(1)} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}^{(2)} \delta \varepsilon_{xx}) dV \\
 &= \int_V t_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dV + \left[ \int_0^A \sigma_{xx}^{(2)} \delta \varepsilon_{xx} dA \right]_0^L
 \end{aligned} \tag{5}$$

Thay (4) vào (5) ta được:

$$\begin{aligned}
 \delta U_s &= \int_0^L N_{xx}^{(1)} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx - \int_0^L M_{xx}^{(1)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \\
 &+ \left[ M_{xx}^{(2)} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_{xx}^{(2)} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_0^L
 \end{aligned} \tag{6}$$

trong đó:  $N_{xx}^{(1)}, M_{xx}^{(1)}, N_{xx}^{(2)}, M_{xx}^{(2)}$  là tổng hợp lực dọc, mômen uốn, lực dọc phi tuyến cổ điển, mômen phi tuyến cổ điển, chúng được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}
 N_{xx}^{(1)} &= \int_A t_{xx} dA; & M_{xx}^{(1)} &= \int_A z t_{xx} dA, \\
 N_{xx}^{(2)} &= \int_A \sigma_{xx}^{(2)} dA; & M_{xx}^{(2)} &= \int_A z \sigma_{xx}^{(2)} dA.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Công ảo của động năng dầm micro được cho bởi:

$$\delta K_e = \rho A \int_0^L \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] dx \tag{8}$$

trong đó  $A=bh$  là diện tích của mặt cắt ngang của dầm micro.

Công ảo của lực ngoài được cho bởi:

$$\delta W_e = \int_0^L (f \delta w) dx \tag{9}$$

trong đó  $f(x,t)$  là lực tĩnh điện gây ra bởi hai bản tụ tích điện tác dụng lên dầm theo (Aifantis.E,1992; Yiming Fu và cộng sự [26], 2011):

$$f(x,t) = \frac{\varepsilon_v b V_0^2}{2} \left[ \frac{1}{(g_0 - w)^2} - \frac{1}{(g_0 + w)^2} \right] \tag{10}$$

với  $\varepsilon_v = 8.85 pF / m$  là hằng số điện môi của môi trường chân không.

Theo lý thuyết Hamilton, năng lượng biến dạng  $U_s$ , động năng  $K_e$  và công ngoại lực  $W_e$

thoả mãn phương trình sau:

$$\int_0^t (\delta K_e + \delta W_e + \delta U_s) dt = 0 \quad (11)$$

Thay các phương trình (6), (8) và (9) vào phương trình (11); sau một số biến đổi toán học, ta thu được phương trình chuyển động của dầm micro

$$\delta u: \frac{\partial N_{xx}^{(1)}}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12)$$

$$\delta w: \frac{\partial^2 M_{xx}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xx}^{(1)} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (13)$$

Và các điều kiện biên tương ứng tại  $x=0$  và  $x=L$

$$\delta u: N_{xx}^{(1)} = 0 \quad \text{or} \quad u = 0 \quad (14)$$

$$\delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right): N_{xx}^{(2)} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

$$\delta w: \frac{\partial M_{xx}^{(1)}}{\partial x} + N_{xx}^{(1)} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right): M_{xx}^{(1)} - N_{xx}^{(2)} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

$$\delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right): M_{xx}^{(2)} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

Ta thấy rằng (12) và (13) là hệ hai phương trình chuyển động của dầm micro theo dịch chuyển dọc trục và dịch chuyển ngang. Tuy nhiên, nếu quán tính dọc trục được bỏ qua, hai phương trình này có thể giảm thành một phương trình duy nhất với dịch chuyển ngang.

Sử dụng các phương trình (3), (4) và (7) ta được:

$$N_{xx}^{(1)} - (ea)^2 \frac{\partial^2 N_{xx}^{(1)}}{\partial x^2} = \left( 1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (19)$$

$$M_{xx}^{(1)} - (ea)^2 \frac{\partial^2 M_{xx}^{(1)}}{\partial x^2} = - \left( 1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (20)$$

Thay các phương trình (19) và (20) vào phương trình (13), ta được phương trình chuyển

động của dầm micro theo dịch chuyển ngang

$$EI \left( 1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[ P_0 - \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (ea)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] + \rho A \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (ea)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right\} = f - (ea)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (21)$$

Phương trình (21) là phương trình mô tả chuyển động ngang của dầm micro dưới tác dụng của lực tĩnh điện theo lý thuyết đàn hồi gradient biến dạng không địa phương. Để thuận tiện cho việc tính toán, ta đưa vào các biến không thứ nguyên sau:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \bar{w} = \frac{w}{L}; \bar{t} = t \sqrt{\frac{EI}{\rho EI}}; \kappa = \frac{1}{L}; P = \frac{P_0 L^2}{EI}; \beta = \frac{ea}{L}; \gamma = \sqrt{\frac{AL^2}{I}}; \eta = \frac{g_0}{L}; V = \sqrt{\frac{24 \epsilon_v b V_0^2 L^4}{Eg_0^3 h^3}}. \quad (22)$$

Sử dụng (22), phương trình chuyển động của dầm micro (21) được đưa về dạng không thứ nguyên sau đây

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} - \kappa^2 \frac{\partial^6 \bar{w}}{\partial \bar{t}^6} \right) + P \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} - \beta^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} \right) - \frac{1}{2} \gamma^2 \eta^2 \int_0^1 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \beta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} \right) d\bar{x} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{t}^2} - \beta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{t}^2} - \frac{1}{4} V^2 \left[ \frac{1}{(1-\bar{w})^2} - \frac{1}{(1+\bar{w})^2} \right] + \frac{3}{2} V^2 \beta^2 \left[ \frac{1}{(1-\bar{w})^4} - \frac{1}{(1+\bar{w})^4} \right] \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} V^2 \beta^2 \left[ \frac{1}{(1-\bar{w})^3} + \frac{1}{(1+\bar{w})^3} \right] \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}. \quad (23)$$

Sử dụng phương pháp Galerkin đưa phương trình đạo hàm riêng (23) về phương trình vi phân thường. Nghiệm của phương trình (23) có thể viết dưới dạng tách biến và thoả mãn điều kiện biên ngầm có dạng:

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2} q(\bar{t}) [1 - \cos(2\pi \bar{x})] \quad (24)$$

Thay phương trình (24) vào phương trình (23) và sử dụng phương pháp Bubnov-Galerkin ta được:

$$\ddot{q}(c_1 + c_2q^2 + c_3q^4 + c_4q^8) + c_6q + c_7q^3 + c_8q^5 + c_9q^7 + c_{10}q^9 + c_{11}q^{11} = 0 \tag{25}$$

trong đó các hệ số  $c_k$  với  $k=1,2..11$  được xác định bởi:

$$c_1 = \beta^2 \int_0^1 \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} - \int_0^1 \phi^2 d\bar{x} \tag{26}$$

$$c_2 = 4 \int_0^1 \phi^4 d\bar{x} - 4\beta^2 \int_0^1 \phi^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} \tag{27}$$

$$c_3 = 6\beta^2 \int_0^1 \phi^5 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} - 6 \int_0^1 \phi^6 d\bar{x} \tag{28}$$

$$c_4 = -4\beta^2 \int_0^1 \phi^7 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} + 4 \int_0^1 \phi^8 d\bar{x} \tag{29}$$

$$c_5 = \beta^2 \int_0^1 \phi^9 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} - \int_0^1 \phi^{10} d\bar{x} \tag{30}$$

$$c_6 = \kappa^2 \int_0^1 \phi \frac{\partial^6 \phi}{\partial \bar{x}^6} d\bar{x} - (1 - P\beta^2) \int_0^1 \phi \frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{x}^4} d\bar{x} \tag{31}$$

$$-P \int_0^1 \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} + V^2 \int_0^1 \phi^2 d\bar{x} - 12V^2\beta^2 \int_0^1 \phi^2 d\bar{x}$$

$$c_7 = -4\kappa^2 \int_0^1 \phi^3 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \bar{x}^6} d\bar{x} + 4(1 - P\beta^2) \int_0^1 \phi^3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{x}^4} d\bar{x}$$

$$+ \frac{1}{2} \gamma^2 \beta^2 \eta^2 \int_0^1 \phi \frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{x}^4} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] d\bar{x} \tag{32}$$

$$+ 4P \int_0^1 \phi^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} + \frac{1}{2} \gamma^2 \eta^2 \int_0^1 \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] d\bar{x}$$

$$- 2V^2 \int_0^1 \phi^4 d\bar{x} + -12V^2\beta^2 \int_0^1 \phi^4 d\bar{x}$$

$$c_8 = 6\kappa^2 \int_0^1 \phi^5 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \bar{x}^6} d\bar{x} - 6(1 - P\beta^2) \int_0^1 \phi^5 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{x}^4} d\bar{x}$$

$$+ 2\gamma^2 \beta^2 \eta^2 \int_0^1 \phi^3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{x}^4} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] d\bar{x} \tag{33}$$

$$- 6P \int_0^1 \phi^5 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} - 2\gamma^2 \eta^2 \int_0^1 \phi^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] d\bar{x}$$

$$+ V^2 \int_0^1 \phi^6 d\bar{x}$$

$$c_9 = -4\kappa^2 \int_0^1 \phi^7 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \bar{x}^6} d\bar{x} + 4(1 - P\beta^2) \int_0^1 \phi^7 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{x}^4} d\bar{x} - 3\gamma^2 \beta^2 \eta^2 \int_0^1 \phi^5 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{x}^4} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] d\bar{x} \tag{34}$$

$$+ 4P \int_0^1 \phi^7 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} + 3\gamma^2 \eta^2 \int_0^1 \phi^5 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] d\bar{x}$$

$$c_{10} = \kappa^2 \int_0^1 \phi^9 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \bar{x}^6} d\bar{x} - (1 - P\beta^2) \int_0^1 \phi^9 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{x}^4} d\bar{x}$$

$$+ 2\gamma^2 \beta^2 \eta^2 \int_0^1 \phi^7 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{x}^4} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] d\bar{x} \tag{35}$$

$$- P \int_0^1 \phi^9 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} - 2\gamma^2 \eta^2 \int_0^1 \phi^7 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] d\bar{x}$$

$$c_{11} = -\frac{1}{2} \gamma^2 \beta^2 \eta^2 \int_0^1 \phi^9 \frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{x}^4} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] d\bar{x} \tag{36}$$

$$- \frac{1}{2} \gamma^2 \eta^2 \int_0^1 \phi^9 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] d\bar{x}$$

**3. Nghiệm dao động phi tuyến**

Áp dụng phương pháp gần đúng biến phân He-Laplace được đề xuất bởi He, 2002 để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình vi phân phi tuyến (25). Theo phương pháp này, dạng biến phân của phương trình (25) được thiết lập:

$$J(q) = \int_0^{T/4} \left[ -\frac{1}{2} \dot{q}^2 (c_1 + c_2q^2 + c_3q^4 + c_4q^6 + c_5q^8) + \frac{1}{2} c_6q^2 + \frac{1}{4} c_7q^4 + \frac{1}{6} c_8q^6 + \frac{1}{8} c_9q^8 + \frac{1}{10} c_{10}q^{10} + \frac{1}{12} c_{11}q^{12} \right] dt \tag{37}$$

trong đó, T là chu kỳ của dao động.

Nghiệm xấp xỉ của phương trình (25) được tìm dưới dạng:

$$q(\bar{t}) = Q_0 \cos(\omega\bar{t}) \tag{38}$$

Thay (38) vào (37) ta được biểu thức biến phân dạng  $J(\alpha, \omega)$  từ điều kiện dừng

$$\frac{\partial J(Q_0, \omega)}{\partial Q_0} = 0$$

ta tìm được tần số xấp xỉ của dao động: (39)

trong đó  $\tau = \omega\bar{t}$  Thực hiện phép tính tích



phân trong phương trình (39), tần số xấp xỉ của dao động sử dụng phương pháp biến phân được

cho bởi (40)

Và nghiệm xấp xỉ của dao động: (41)

$$\omega = \frac{\sqrt{\int_0^{\pi/2} (c_6 \cos^2 \tau + c_7 Q_0^2 \cos^4 \tau + c_8 Q_0^4 \cos^6 \tau + c_9 Q_0^6 \cos^8 \tau + c_{10} Q_0^8 \cos^{10} \tau + c_{11} Q_0^{10} \cos^{12} \tau) d\tau}}{\sqrt{\int_0^{\pi/2} [(c_1 + 2c_2 Q_0^2 \cos^2 \tau + 3c_3 Q_0^4 \cos^4 \tau + 4c_4 Q_0^6 \cos^6 \tau + 5c_5 Q_0^8 \cos^8 \tau) \sin^2 \tau]}} \quad (39)$$

$$\omega_{VA} = \sqrt{\frac{c_6 + \frac{3}{4} c_7 Q_0^2 + \frac{5}{8} c_8 Q_0^4 + \frac{35}{64} c_9 Q_0^6 + \frac{63}{128} c_{10} Q_0^8 + \frac{231}{512} c_{11} Q_0^{10}}{c_1 + \frac{1}{2} c_2 Q_0^2 + \frac{3}{8} c_3 Q_0^4 + \frac{5}{16} c_4 Q_0^6 + \frac{35}{128} c_5 Q_0^8}} \quad (40)$$

$$q_{VA}(\bar{t}) = \alpha \cos \left( \sqrt{\frac{c_6 + \frac{3}{4} c_7 Q_0^2 + \frac{5}{8} c_8 Q_0^4 + \frac{35}{64} c_9 Q_0^6 + \frac{63}{128} c_{10} Q_0^8 + \frac{231}{512} c_{11} Q_0^{10}}{c_1 + \frac{1}{2} c_2 Q_0^2 + \frac{3}{8} c_3 Q_0^4 + \frac{5}{16} c_4 Q_0^6 + \frac{35}{128} c_5 Q_0^8}} \bar{t} \right) \quad (41)$$

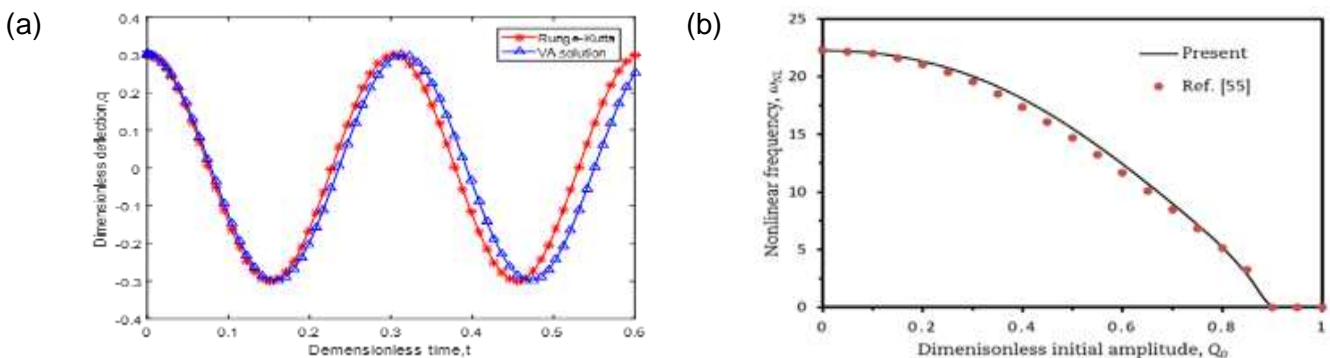
**4. Kết quả tính toán và thảo luận**

Để kiểm chứng độ chính xác của nghiệm giải tích gần đúng thu được, các kết quả trong đề tài sử dụng phương pháp biến phân (VA) so sánh với nghiệm sử dụng bằng phương pháp Runge-Kutta và xét các trường hợp đặc biệt:  $\kappa = l/L = 0$ ;  $\beta = ea/L = 0$  để đưa về lý thuyết đàn hồi cổ điển trong một số nghiên cứu của Fu và cộng sự [7] và

Qian và cộng sự [27]. Các tần số xấp xỉ thu được bởi các phương pháp giải tích khác nhau và tần số chính xác được liệt kê trong Bảng 1 với một vài giá trị khác nhau của biên độ ban đầu  $\alpha$  lực nén dọc trục P và điện thế tác dụng V. Ta có thể quan sát thấy nghiệm xấp xỉ thu được bởi nghiên cứu bằng phương pháp biến phân  $\omega_{VA}$  so với nghiệm xấp xỉ bằng phương pháp cân bằng năng lượng  $\omega_{EBM}$

Bảng 1. So sánh các tần số xấp xỉ với tần số chính xác của MEMS

$\alpha$	N	V	$\omega_{ex}$ (Yiming Fu và cộng sự, 2011)	$\omega_{EBM}$ (Y.H.Qian và cộng sự, 2012)	$\omega_{VA}$
0.3	10	0	26.8372	26.3867	26.3644
0.3	10	20	16.6484	16.3829	16.3556
0.6	10	10	28.5382	26.5324	26.1671
0.6	10	20	18.5902	17.5017	17.0940
0.3	10	0	26.8372	26.3867	26.3644



Hình 2. Độ võng và quỹ đạo pha của MEMS thu được bởi các phương pháp khác nhau với  $V = 10, \beta = 0.1, P = 10, \eta = 0.3, \gamma = 20, \kappa = 0.1$

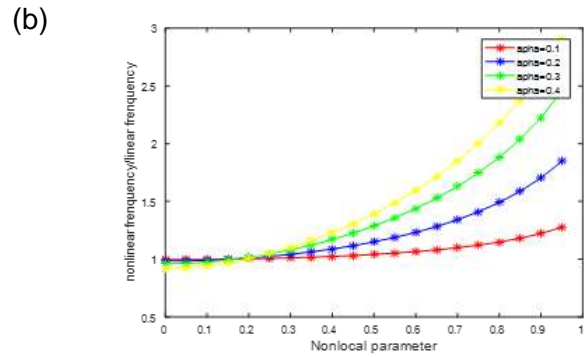
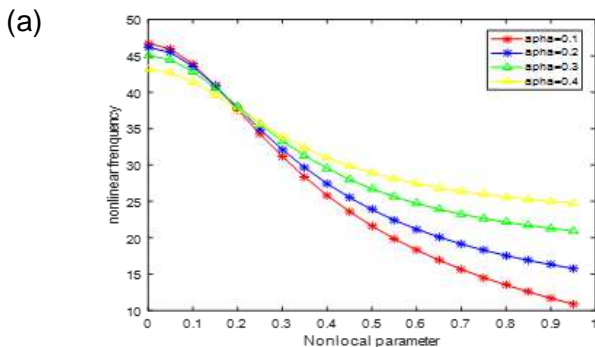
Nghiệm xấp xỉ thu được bởi nghiên cứu bằng phương pháp biến phân He-Laplace so sánh với nghiệm số sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4, kết quả được thể hiện trong các Hình 2.

Trong các phần tiếp theo, ảnh hưởng của các tham số khác nhau của hệ đến tần số phi tuyến  $\omega_{NL}$  và các tỉ số tần số  $\omega_{NL} / \omega_L$  sẽ được khảo sát, trong đó  $\omega_L$  tần số tuyến tính của MEMS dựa trên lý thuyết đàn hồi cổ điển. Trong các kết quả dưới đây, đề tài sử dụng tần số phi tuyến  $\omega_{NL}$  thu được bởi phương pháp nhiễu loạn động vị (HPLTM).

Bảng 2. Các tần số xấp xỉ của MEMS

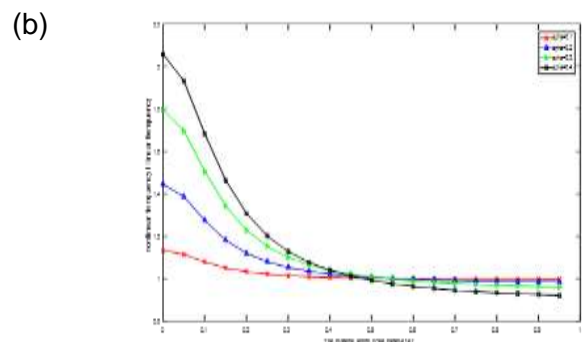
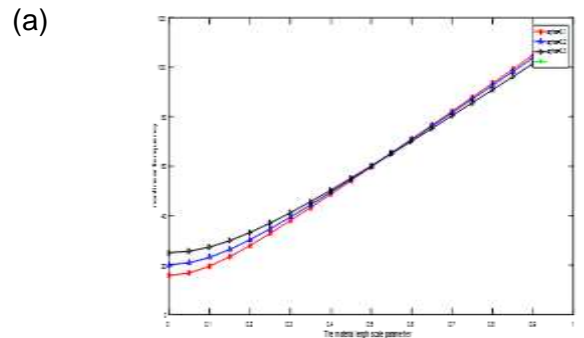
$\alpha$	N	V	$\beta$	$\kappa$	$\eta$	$\gamma$	$\omega_{NL}$
0.1	10	5	0.2	0.2	0.5	10	25.4797
	10	10	0.2	0.2	0.5	20	25.5796
	10	15	0.2	0.2	0.5	30	25.7453
0.2	5	5	0.2	0.2	0.5	10	27.5600
	5	10	0.2	0.2	0.5	20	29.1717
	5	15	0.2	0.2	0.5	30	31.6761
0.4	0	5	0.2	0.2	0.5	10	28.5916
	0	10	0.2	0.2	0.5	20	34.1727
	0	15	0.2	0.2	0.5	30	41.8521

Tiếp theo ta đi khảo sát ảnh hưởng của hệ số phi cục bộ ( $\beta = ea / L$ ) đến tần số phi tuyến và tỉ số tần số của MEMS được thể hiện bởi Hình 3-4 với các giá trị  $\kappa = 0.3, P = 5, \eta = 0.2, V = 10, \gamma = 40$ . Từ Hình 3, ta thấy khi tăng giá trị của tham số phi cục bộ  $\beta$  tần số phi tuyến giảm, trong khi tỉ số tần số lại tăng. Điều này hoàn toàn phù hợp với lý thuyết đàn hồi phi cục bộ rằng tham số phi cục bộ làm giảm độ cứng của dầm micro, chính vì vậy tần số phi tuyến giảm khi tăng giá trị của tham số phi cục bộ.



Hình 3. Sự thay đổi của tần số phi tuyến (a) và tỉ số (b) theo tham số phi cục bộ

Ảnh hưởng của tham số tỉ lệ chiều dài vật liệu ( $\kappa = l / L$ ) đến tần số phi tuyến và tỉ số tần số của MEMS được thể hiện trong Hình 4 với các tham số hệ thống:  $\beta = 0.2, P = 5, \eta = 0.2, V = 10, \gamma = 60$  ta có thể quan sát thấy rằng sự tăng tham số tỉ lệ chiều dài vật liệu dẫn đến sự tăng tần số phi tuyến và sự giảm tỉ số của dầm Micro. Tham số tỉ lệ chiều dài vật liệu có ảnh hưởng làm tăng độ cứng của dầm Micro, chính vì vậy, tần số phi tuyến của dầm Micro sẽ tăng khi tăng giá trị của tham số tỉ lệ chiều dài vật liệu, điều này phù hợp với lý thuyết độ dốc biến dạng.



Hình 4. Sự thay đổi của tần số phi tuyến (a) và tỉ số tần số (b) theo tham số tỉ lệ chiều dài của vật liệu



## 5. Kết luận

Trong nghiên cứu, nhóm tác giả đã tìm hiểu nghiên cứu dao động phi tuyến của dầm micro dưới tác dụng của lực điện trường tĩnh. Thành lập được nghiệm giải tích cho bài toán dao động phi tuyến của dầm micro qua đó đánh giá ảnh hưởng của kích thước hình học cũng như khoảng cách ban đầu giữa bản tụ điện. Xây dựng phương trình dao động phi tuyến cho dầm micro dưới tác dụng của điện trường theo lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và gradient biến dạng. Đánh giá ảnh hưởng của các yếu tố phi cục bộ cũng như gradient biến dạng đến dao động phi tuyến của dầm.

### Lời cảm ơn

Nghiên cứu được tài trợ trường đại học Công nghệ GTVT, mã số đề tài “ĐTTĐ2021-01”.

### Tài liệu tham khảo

- [1]. Batra RC, Porfiri M, Spinello D (2007) Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems. *Smart Mater Struct* 16:23–31.
- [2]. Chuang WC, Lee HL, Chang PZ, Hu YC (2010) Review on the modeling of electrostatic MEMS. *Sensors* 10:6149–6171.
- [3]. Zhang WM, Meng G (2007) Nonlinear dynamic analysis of electrostatically actuated resonant MEMS sensors under parametric excitation. *IEEE Sens J* 7:370–380.
- [4]. Nemirovsky Y, Bochobza-Degani O (2001) A methodology and model for the pull in parameters of electrostatic actuators. *J Microelectromech Syst* 10:601–615.
- [5]. Lee KB (2007) Closed-form expressions for pull-in parameters of two-degree-of-freedom torsional microactuators. *J Micromech Microeng* 17:1853–1862.
- [6]. Krylov S, Dick N (2010) Dynamic stability of electrostatically actuated initially curved shallow micro beams. *Continuum Mech Thermodyn* 22:445–468.
- [7]. Fu Y, Zhang J (2011) Size-dependent pull-in phenomena in electrically actuated nanobeams incorporating surface energies. *Appl Math Model* 35:941–951.
- [8]. Askari AR, Tahani M (2016) Stability analysis of electrostatically actuated nano/micro-beams under the effect of van der Waals force, a semi-analytical approach. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 34:130–141.
- [9]. Fleck NA, Muller GM, Ashby MF, Hutchinson JW (1994) Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metall Mater* 42(2):475–487.
- [10]. Stolken JS, Evans AG (1998) A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater* 46(14):5109–5115.
- [11]. Chong ACM, Yang F, Lam DCC, Tong P (2001) Torsion and bending of micron-scaled structures. *J Mater Res* 16(04):1052–1058.
- [12]. Eringen AC (1972) Nonlocal polar elastic continua. *Int J Eng Sci* 10:1–16.
- [13]. Eringen AC, Edelen DGB (1972) On nonlocal elasticity. *Int J Eng Sci* 10:233–248.
- [14]. Mindlin RD (1965) Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int J Solids Struct* 1:417–438.
- [15]. Aifantis EC (1992) On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *Int J Eng Sci* 30(10):1279–1299.
- [16]. Lam DCC, Yang F, Chong ACM, Wang J, Tong P (2003) Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J Mech Phys Solids* 51:477–508.
- [17]. Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P (2002) Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int J Solids Struct* 39(10):2731–2743.
- [18]. Kivi AR, Azizi S, Norouzi P (2017) Bifurcation analysis of an electrostatically actuated nano-beam based on modified couple stress theory. *Sens Imaging* 18:32.
- [19]. Shen J, Wang H, Zheng S (2018) Size-dependent pull-in analysis of a composite laminated micro-beam actuated by electrostatic and piezoelectric forces:

- generalized differential quadrature method. *Int J Mech Sci* 135:353–361.
- [20]. Nikpourian A, Ghazavi MR, Azizi S (2019) Size-dependent nonlinear behavior of a piezoelectrically actuated capacitive bistable microstructure. *Int J Non-Linear Mech* 114:49–61.
- [21]. Lim C, Zhang G, Reddy J (2015) A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *J Mech Phys Solids* 78:298–313.
- [22]. Simsek M (2016) Nonlinear free vibration of a functionally graded nanobeam using nonlocal strain gradient theory and a novel Hamiltonian approach. *Int J Eng Sci* 105:12–27.
- [23]. VH Dang (2020) Buckling and nonlinear vibration of size-dependent nanobeam based on the non-local strain gradient theory. *J Appl Nonlinear Dyn* 9(3):427–446.
- [24]. GP Bui , VH Dang, Hamid M. Sedighi , Abdullah H. Sofiyev (2022) Size-dependent nonlinear vibration of functionally graded composite micro-beams reinforced by carbon nanotubes with piezoelectric layers in thermal environments. *ActaMechanica* volume 233, pages2249–2270.
- [25] DV Hieu, TH Duong, GP Bui (2020) Nonlinear vibration of a functionally graded nanobeam based on the nonlocal strain gradient theory considering thickness effect. *Adv Civ Eng*220:17 (Article ID 9407673).
- [26]. Yiming Fu, Jin Zhang, Liangjiao Wan. Application of the energy balance method to a nonlinear oscillator arising in the microelectromechanical syms (MEMS). *Current Applied Phynics*,vol.11,pp.482,2011.
- [27]. Y.H.Qian, D.X.Ren, S.K.Lai, S.M.Chen. Analytical approximations to nonlinear vibration of electrostatically actuated microbeam, *Communications Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, pp. 1947-1955, 2012.