



A Comparative Study of MVFOSM and FORM: Influence of Limit State Function Formulation and Coefficient of Variation

Article info

Type of article:

Original research paper

DOI:

<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2026.vn.6.4.140-151>

*Corresponding author:

Email address:

vanson.ctt@vamaru.edu.vn

Received: 05/03/2026

Received in Revised Form:

07/04/2026

Accepted: 15/06/2026

Tran Anh Tuan¹, Doan Nhu Son^{2*}

¹University of Transport Technology, 54 Trieu Khuc Street, Thanh Liet Ward, Hanoi, Vietnam

^{2*}Faculty of Civil Engineering, Vietnam Maritime University, 484 Lach Tray Street, Le Chan, Hai Phong, Vietnam

Abstract: This paper investigates and compares the characteristics of two reliability analysis methods commonly used in civil engineering practice, namely the Mean-Value First-Order Second-Moment (MVFOSM) and the First-Order Reliability Method (FORM). The focus of the study is to evaluate the dependence of reliability results on (i) the formulation of the limit state function and (ii) the level of variability of random variables, characterized by the coefficient of variation (COV), within the framework of the two methods. Through a series of illustrative examples, the study demonstrates that MVFOSM is highly sensitive to the mathematical form of the limit state function as well as to increasing COV values, which may lead to significant discrepancies in the estimation of the reliability index for nonlinear problems. In contrast, FORM provides a more accurate representation of the limit state surface and yields more stable reliability estimates across different levels of uncertainty. The results confirm that FORM outperforms MVFOSM, particularly for nonlinear civil engineering problems involving high levels of uncertainty.

Keywords: Reliability analysis; MVFOSM; FORM; Limit state function; Coefficient of variation.



Thông tin bài viết
Dạng bài viết:
Bài báo nghiên cứu

DOI:
<https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2026.vn.6.4.140-151>

Tác giả liên hệ:
Địa chỉ Email:
vanson.ctt@vamaru.edu.vn

Ngày nộp bài: 05/03/2026
Ngày nộp bài sửa: 07/04/2026
Ngày chấp nhận: 15/06/2026

Nghiên cứu so sánh phương pháp MVFOSM và FORM: Ảnh hưởng của cách biểu diễn hàm trạng thái giới hạn và hệ số biến thiên

Trần Anh Tuấn¹, Đoàn Như Sơn^{2*}

¹Khoa Công trình, Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, 54 Triều Khúc, Thanh Liệt, Hà Nội.

^{2*}Khoa Công trình, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam, 484 Lạch Tray, Lê Chân, Hải Phòng.

Tóm tắt: Bài báo này nghiên cứu và so sánh đặc tính của hai phương pháp phân tích độ tin cậy thường được sử dụng trong kỹ thuật xây dựng, bao gồm phương pháp mô men bậc hai với khai triển bậc nhất tại giá trị trung bình (MVFOSM: Mean-Value First-Order Second-Moment) và phương pháp độ tin cậy bậc nhất (FORM: First-Order Reliability Method). Trọng tâm của nghiên cứu là đánh giá mức độ phụ thuộc của kết quả phân tích độ tin cậy vào (i) cách định nghĩa hàm trạng thái và (ii) mức độ biến thiên của các biến ngẫu nhiên, được đặc trưng thông qua hệ số biến thiên (COV), trong khuôn khổ phương pháp MVFOSM. Thông qua ba ví dụ, nghiên cứu chỉ ra rằng MVFOSM có độ nhạy cao đối với dạng hàm trạng thái và sự gia tăng của COV, dẫn đến sai lệch đáng kể trong việc ước lượng chỉ số độ tin cậy đối với các bài toán phi tuyến. Ngược lại, FORM cho thấy khả năng mô tả chính xác hơn bề mặt trạng thái giới hạn và mang lại kết quả ổn định hơn trong nhiều mức độ bất định khác nhau. Các kết quả thu được khẳng định rằng FORM vượt trội hơn MVFOSM, đặc biệt đối với các bài toán kỹ thuật xây dựng có tính phi tuyến và độ không chắc chắn lớn.

Từ khóa: Phân tích độ tin cậy; Phương pháp MVFOSM; FORM; Hàm trạng thái giới hạn; Hệ số biến thiên.

1. Giới thiệu

Trong thiết kế và đánh giá an toàn công trình xây dựng, việc xét đến các yếu tố bất định vốn có trong tải trọng, đặc trưng vật liệu hay điều kiện hình học đóng vai trò then chốt trong việc đảm bảo mức độ an toàn và hiệu quả kinh tế của kết cấu. Phân tích độ tin cậy đã trở thành một công cụ quan trọng nhằm lượng hóa xác suất phá hoại và hỗ trợ ra quyết định thiết kế trên cơ sở xác suất, thay vì chỉ dựa vào các hệ số an toàn mang tính tất định. Trong số các phương pháp phân tích độ tin cậy,

phương pháp mô men bậc hai với khai triển bậc nhất tại giá trị trung bình (MVFOSM: Mean-Value First-Order Second-Moment) và phương pháp độ tin cậy bậc nhất (FORM: First-Order Reliability Method) là hai kỹ thuật phổ biến và được sử dụng rộng rãi trong nhiều bài toán kỹ thuật xây dựng [1, 2, 3].

MVFOSM có ưu điểm là đơn giản, dễ triển khai và không đòi hỏi chi phí tính toán lớn. Phương pháp này ước lượng chỉ số độ tin cậy dựa trên các moment bậc nhất và bậc hai của hàm trạng thái,

do đó đặc biệt thuận lợi trong giai đoạn thiết kế sơ bộ. Tuy nhiên, nhiều nghiên cứu trước đây đã chỉ ra rằng kết quả của MVFOSM phụ thuộc mạnh vào cách định nghĩa hàm trạng thái và giả định tuyến tính hóa tại điểm trung bình của các biến ngẫu nhiên [4]. Khi hàm trạng thái có tính phi tuyến rõ rệt hoặc khi mức độ biến thiên của các biến ngẫu nhiên tăng cao, độ chính xác của MVFOSM có thể suy giảm đáng kể [5].

FORM được phát triển nhằm khắc phục các hạn chế nêu trên bằng cách xác định điểm thiết kế có xác suất lớn nhất trên bề mặt trạng thái giới hạn trong không gian chuẩn hóa [2, 6]. Nhờ đó, FORM có khả năng mô tả tốt hơn hành vi phi tuyến của hàm trạng thái và thường cho kết quả ổn định hơn so với MVFOSM. Mặc dù vậy, FORM đòi hỏi việc giải một bài toán tối ưu phi tuyến và có chi phí tính toán cao hơn [6], khiến việc lựa chọn phương pháp phù hợp trong thực hành kỹ thuật vẫn còn là một vấn đề cần được cân nhắc.

Trong những năm gần đây, một số nghiên cứu trong nước đã áp dụng các phương pháp phân tích độ tin cậy trong các bài toán kết cấu và địa kỹ thuật. Các nghiên cứu này sử dụng các phương pháp xác suất để đánh giá độ an toàn của công trình khi xét đến các bất định của tải trọng và đặc trưng vật liệu, qua đó minh họa khả năng ứng dụng của các phương pháp như MVFOSM, FORM hoặc mô phỏng Monte Carlo (MCS) trong các bài toán kỹ thuật xây dựng cụ thể [7, 8, 9, 10, 11]. Những nghiên cứu này đã góp phần làm rõ vai trò của phân tích độ tin cậy trong việc đánh giá mức độ an toàn của công trình và hỗ trợ quá trình thiết kế theo hướng tiếp cận xác suất.

Mặc dù đã có nhiều công trình nghiên cứu đề cập đến MVFOSM và FORM, phần lớn các nghiên cứu tập trung vào việc áp dụng riêng lẻ từng phương pháp hoặc so sánh kết quả trong một số trường hợp cụ thể [4, 5]. Các phân tích mang tính hệ thống về ảnh hưởng đồng thời của dạng hàm trạng thái và hệ số biến thiên (COV: Coefficient Of Variation) của các biến ngẫu nhiên đến độ chính xác của MVFOSM vẫn còn tương đối hạn chế. Bên cạnh đó, các ví dụ minh họa có hàm trạng thái

tường minh, gắn liền với các bài toán kỹ thuật xây dựng điển hình, chưa được khai thác đầy đủ để làm rõ sự khác biệt giữa hai phương pháp.

Xuất phát từ những hạn chế nêu trên, bài báo này nhằm đánh giá các đặc tính của MVFOSM và FORM thông qua các ví dụ kỹ thuật xây dựng với hàm trạng thái được xác định rõ ràng. Nghiên cứu này tập trung khảo sát ảnh hưởng của mức độ biến thiên của các biến ngẫu nhiên và dạng phi tuyến của hàm trạng thái đến chỉ số độ tin cậy thu được từ MVFOSM, đồng thời sử dụng FORM và MCS làm cơ sở tham chiếu. Phương pháp luận của nghiên cứu bao gồm xây dựng các mô hình xác suất, thực hiện phân tích độ tin cậy bằng cả hai phương pháp và so sánh kết quả định lượng. Từ đó có những hiểu biết rõ hơn về đặc điểm của từng phương pháp và phạm vi áp dụng.

2. Phương pháp

Trong phân tích độ tin cậy kết cấu, trạng thái an toàn hoặc phá hoại của hệ thống thường được mô tả thông qua hàm trạng thái giới hạn như Công thức (1).

$$g(\mathbf{X})=R(\mathbf{X})-Q(\mathbf{X}) \tag{1}$$

Trong đó, $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ là véc tơ gồm n biến ngẫu nhiên. R và Q lần lượt là sức kháng và tác động. Hệ thống được xem là an toàn khi $g(\mathbf{X}) \geq 0$ và phá hoại khi $g(\mathbf{X}) < 0$. Trong nghiên cứu này, hai phương pháp phân tích độ tin cậy bậc nhất, MVFOSM và FORM, được sử dụng và so sánh.

2.1. Phương pháp mô men bậc hai với khai triển bậc nhất tại giá trị trung bình (MVFOSM)

MVFOSM ước lượng chỉ số độ tin cậy dựa trên các moment bậc nhất và bậc hai của hàm trạng thái. Hàm $g(\mathbf{X})$ được tuyến tính hóa bằng khai triển Taylor bậc nhất quanh giá trị trung bình của các biến ngẫu nhiên μ_X như Công thức (2).

$$g(\mathbf{X}) \approx g(\mu_X) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\mu_X} (X_i - \mu_{X_i}) \tag{2}$$

Từ biểu thức trên, giá trị trung bình và phương sai của hàm trạng thái được xấp xỉ lần lượt theo công thức (3) và (4).

$$\mu_g \approx g(\mu_X) \tag{3}$$

$$\sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\mu_X} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n \left[\left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\mu_{X_i}} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \Big|_{\mu_{X_j}} \right) \rho_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \right] \quad (4)$$

Trong đó, μ_{X_i} và σ_{X_i} lần lượt là giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của biến X_i . ρ là hệ số tương quan giữa các biến. Với các biến độc lập ($\rho = 0$), số hạng thứ hai trong công thức (4) sẽ được bỏ qua [12]. Sau đó, chỉ số độ tin cậy theo MVFOSM được xác định theo công thức (5a) hoặc (5b) khi giả định hàm trạng thái có phân phối chuẩn (Normal distribution) hoặc logarit chuẩn (Lognormal distribution).

$$\beta_g = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (5a)$$

$$\beta_{LN} = \frac{\mu_{\ln g}}{\sigma_{\ln g}} = \frac{\ln(\bar{g})}{\sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{\sigma_g}{\mu_g} \right)^2 \right]}} \quad (5b)$$

Trong đó, $\mu_{\ln g}$ và $\sigma_{\ln g}$ là giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của hàm trạng thái trong không gian logarit, còn \bar{g} là trung vị của hàm trạng thái.

Do việc tuyến tính hóa được thực hiện tại điểm trung bình, kết quả của MVFOSM phụ thuộc mạnh vào các định nghĩa hàm trạng thái cũng như mức độ biến thiên (COV) của các biến đầu vào. Khi hàm trạng thái có tính phi tuyến hoặc COV tăng cao, giả định tuyến tính của MVFOSM có thể dẫn đến sai lệch đáng kể trong việc ước lượng chỉ số độ tin cậy và sẽ được xem xét trong các ví dụ ở Mục 4.

2.2. Phương pháp độ tin cậy bậc nhất (FORM)

FORM tiếp cận bài toán phân tích độ tin cậy bằng cách biến đổi các biến ngẫu nhiên ban đầu \mathbf{X} sang không gian chuẩn hóa \mathbf{U} . Không gian chuẩn hóa là không gian gồm các biến độc lập và tuân theo phân phối chuẩn tắc (phân phối chuẩn có giá trị trung bình bằng không và độ lệch chuẩn bằng 1). Trong không gian chuẩn hóa, bề mặt hàm trạng thái giới hạn g được biểu diễn như công thức (6). Khi tồn tại sự tương quan giữa các biến ngẫu nhiên, phương pháp phân rã Cholesky được sử dụng để xét đến cấu trúc tương quan này [13].

$$g(\mathbf{U})=0 \quad (6)$$

Ý tưởng cốt lõi của FORM là xác định điểm thiết kế (design point, \mathbf{U}^*), hay còn gọi là điểm trên bề mặt hàm trạng thái có xác suất lớn nhất dẫn đến phá hoại, bằng cách giải bài toán tối ưu được viết như công thức (7).

$$\mathbf{U}^* = \min_{\mathbf{U}} \|\mathbf{U}\| \quad \text{sao cho } g(\mathbf{U})=0 \quad (7)$$

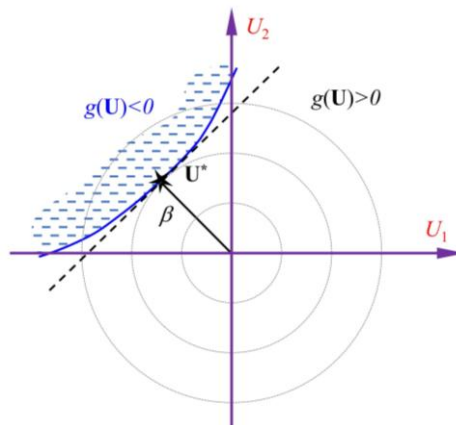
Khi đó, khoảng cách từ gốc tọa độ chuẩn hóa tới điểm thiết kế chính là chỉ số độ tin cậy. Nói khác đi, chỉ số độ tin cậy theo FORM được viết theo công thức (8).

$$\beta = \|\mathbf{U}^*\| \quad (8)$$

Xác suất mất an toàn (P_f) tương ứng với β được tính đổi theo công thức (9) [13].

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (9)$$

Trong đó, Φ là hàm phân phối tích lũy của phân phối chuẩn. Trong không gian hai chiều, ý tưởng của FORM và chỉ số độ tin cậy được mô tả trực quan như trong Hình 1 với các ký hiệu đã mô tả ở trên.



Hình 1. Mô tả chỉ số độ tin cậy trong FORM

Không giống như MVFOSM, FORM thực hiện tuyến tính hóa hàm trạng thái tại điểm thiết kế thay vì tại điểm trung bình. Nhờ đó, FORM có khả năng mô tả chính xác hơn hình dạng cục bộ của bề mặt trạng thái giới hạn, đặc biệt đối với các bài toán phi tuyến. Bài toán tối ưu trong FORM thường được giải bằng các thuật toán lặp, chẳng hạn như phương pháp Hasofer–Lind–Rackwitz–Fiessler (HL-RF).

3. Các ví dụ số

Nhằm đánh giá và so sánh đặc tính của hai phương pháp MVFOSM và FORM, ba ví dụ số đại diện cho các bài toán kỹ thuật xây dựng điển hình được xem xét trong mục này. Trong các ví dụ này, các hàm trạng thái mô tả cùng mức độ an toàn trong tính toán tất định sẽ được viết ở dạng tuyến tính và phi tuyến. Trong tất cả các ví dụ, các biến ngẫu nhiên được giả định là phân phối chuẩn, và kết quả từ MCS với 1 triệu lần thử được sử dụng làm nghiệm tham chiếu nhằm đánh giá độ chính

xác của các phương pháp.

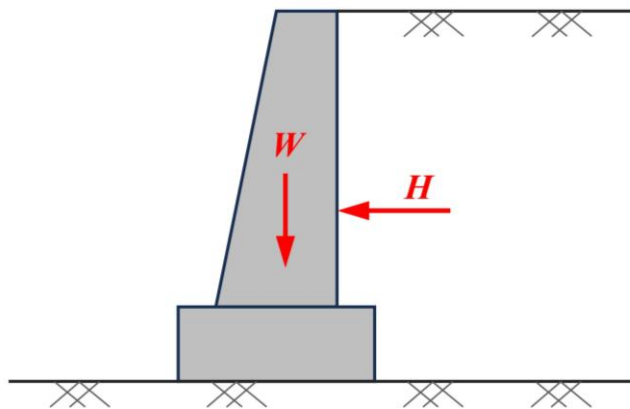
3.1. Bài toán ổn định trượt của tường chắn

Xem xét ổn định trượt ngang của một tường chắn đất như trên Hình 2 (Ví dụ 1). Trong trường hợp này, hàm trạng thái giới hạn được viết như phương trình (10).

$$f(\mathbf{X})=f_cW-H \tag{10a}$$

$$g(\mathbf{X})=\frac{f_cW}{H}-1 \tag{10b}$$

Trong đó, f_c là hệ số ma sát giữa tường chắn và đất nền, được lấy bằng $\tan\varphi$ với φ là góc ma sát trong của đất. W là trọng lượng của tường, H là áp lực ngang của đất. Lưu ý rằng cả hai phương trình (10a) và (10b) đều có chung ý nghĩa vật lý, hệ được coi là ổn định nếu lực giữ lớn hơn lực gây trượt ($f(\mathbf{X})>0$ hoặc $g(\mathbf{X})>0$). Tuy nhiên, hàm trạng thái $f(\mathbf{X})$ tính theo (10a) có đơn vị của lực (kN) nhưng $g(\mathbf{X})$ tính theo (10b) không có thứ nguyên (hay hệ số an toàn) vì đã được chuẩn hóa.



Hình 2. Ví dụ 1 - Ổn định trượt ngang tường chắn

Trong ví dụ này, hai tham số W và H được coi là các biến ngẫu nhiên, các giá trị trung bình của chúng lần lượt là 300 kN và 200 kN. Độ lệch chuẩn của hai tham số này lần lượt là 0.10 và 0.20. Hệ số ma sát được giả định không đổi với giá trị là 1.1. Khi đó hệ số an toàn tính toán được khi sử dụng giá trị trung bình là 1.65.

3.2. Bài toán ổn định trượt phẳng mái dốc đất sét đào thẳng đứng

Xem xét ổn định trượt phẳng của mái dốc đất

sét đào thẳng đứng như Hình 3 (Ví dụ 2). Trong trường hợp này, hàm trạng thái giới hạn được viết như phương trình (11) khi giả định mặt trượt có nghiêng 45° [14].

$$f(\mathbf{X})=4c-\gamma H \tag{11a}$$

$$g(\mathbf{X})=\frac{4c}{\gamma H}-1 \tag{11b}$$

Trong đó, c và γ lần lượt là lực dính đơn vị và trọng lượng riêng của đất. H là chiều cao mái dốc.

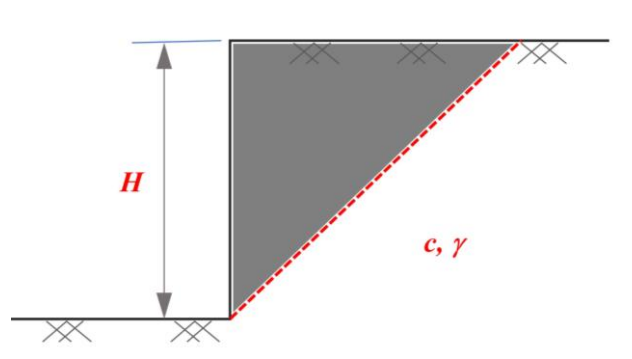
Trong ví dụ này, c và γ được xem xét như các biến bất định với các giá trị trung bình lần lượt là

50 kPa, và 20 kN/m³. Độ lệch chuẩn của các tham số này lần lượt là 10 kPa và 2 kN/m³. Chiều sâu đào là $H = 6$ m. Hệ số an toàn ổn định trượt phẳng tính toán theo các giá trị trung bình là 1.67.

Tương tự như Ví dụ 1, cả hai phương trình trạng thái đều phản ánh trạng thái an toàn (khi hàm nhận giá trị không âm) hay mất ổn định (khi hàm

nhận giá trị âm). Tuy nhiên, hàm $f(\mathbf{X})$ tính theo (11a) có đơn vị của lực dính đơn vị (kPa) nhưng $g(\mathbf{X})$ tính theo (11b) đã được chuẩn hóa để không còn thứ nguyên.

Trong Mục 4, ảnh hưởng của hệ số tương quan giữa các tham số c và γ tới chỉ số độ tin cậy cũng sẽ được xem xét.



Hình 3. Ví dụ 2 - Ổn định trượt phẳng mái dốc đất sét đào thẳng đứng

3.3. Bài toán ổn định cột thép chịu nén

Xem xét bài toán ổn định của cột thép chịu nén đúng tâm như trong Hình 4 (Ví dụ 3). Trong ví dụ này, hàm trạng thái giới hạn được viết như phương trình (12) [15, 16, 17].

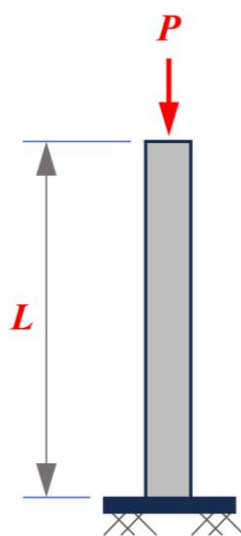
$$f(\mathbf{X}) = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} - P \quad (12a)$$

$$g(\mathbf{X}) = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2 P} - 1 \quad (12b)$$

Trong đó, E là mô đun đàn hồi I là mô men quán tính tiết diện. L và chiều dài cột, K là hệ số

điều kiện biên và P là lực nén dọc trục.

Trong ví dụ này, ba biến E, I, P được xem xét như là những biến ngẫu nhiên để phản ánh sai lệch về vật liệu và hình học cũng như tải trọng tác dụng. Giá trị trung bình của các biến này lần lượt là $E = 2 \times 10^8$ kPa, $I = 5.337 \times 10^{-5}$ m⁴, $P = 500$ kN. Độ lệch chuẩn của các tham số này được giả định lần lượt là 1×10^7 MPa, 5.337×10^{-6} m⁴ và 125 kN. Chiều dài cột là 5 m và được giả định không đổi. Sử dụng các giá trị trung bình, hệ số an toàn tính toán theo quan điểm tất định là 2.11.



Hình 4. Ví dụ 3 - Ổn định cột chịu nén

Tương tự như các ví dụ trước, cả hai phương trình (12a) và (12b) đều phản ánh trạng

thái an toàn (khi hàm nhận giá trị không âm) hay mất ổn định (khi hàm nhận giá trị âm). Hàm $f(\mathbf{X})$ thể

hiện giá trị chênh lệch giữa sức chịu tải và lực tác dụng, trong khi $g(\mathbf{X})$ thể hiện giá trị được chuẩn hóa để không còn thứ nguyên. Cả hai phương pháp MVFOSM và FORM sẽ được áp dụng để tính toán chỉ số độ tin cậy của ba ví dụ trên. Kết quả và thảo luận sẽ được trình bày trong Mục 4.

4. Kết quả và thảo luận

Trong mục này, kết quả tính toán chỉ số độ tin cậy theo hai phương pháp MVFOSM và FORM sẽ được trình bày cho cả 3 ví dụ. Hai dạng hàm tuyến tính (hàm f) và phi tuyến (hàm g) sẽ được sử dụng chung khi phân tích. Ảnh hưởng của tương quan

giữa các biến đầu vào và hệ số biến thiên tới chỉ số độ tin cậy cũng được trình bày.

Bảng 1 trình bày kết quả tính toán theo MVFOSM cho cả 3 ví dụ. Trong Bảng 1, bên cạnh các chỉ số độ tin cậy tính theo các giả định của phân phối chuẩn và phân phối logarit chuẩn, các giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của các hàm trạng thái giới hạn đều được thể hiện. Kết quả tính được từ MCS cũng được ghi ở Bảng 1. Theo đó, xác suất mất an toàn cho Ví dụ 1, 2, 3 lần lượt là 0.608%; 2.753% và 0.056%, tương ứng với các chỉ số độ tin cậy 2.507; 1.918 và 3.279.

Bảng 1. Kết quả tính toán theo MVFOSM

Hàm trạng thái	Giá trị trung bình	Độ lệch chuẩn	Chỉ số độ tin cậy β_N	Chỉ số độ tin cậy β_{LN}
Ví dụ 1 ($P_f = 0.608\%$; $\beta = 2.507$)				
Hàm f	130	51.86	2.507	2.603
Hàm g	0.650	0.369	1.762	1.816
Ví dụ 2 ($P_f = 2.753\%$; $\beta = 1.918$)				
Hàm f	13.33	6.96	1.916	1.888
Hàm g	0.667	0.373	1.789	1.764
Ví dụ 3 ($P_f = 0.056\%$; $\beta = 3.279$)				
Hàm f	553.56	171.76	3.223	3.364
Hàm g	1.107	0.577	1.919	1.986

Bảng 2. Kết quả tính toán theo FORM

Hàm trạng thái	Điểm thiết kế		β	
Ví dụ 1 ($P_f = 0.608\%$; $\beta = 2.507$)				
	W	H		
Hàm f	252.35	272.35	2.507	
Hàm g	252.35	272.35	2.507	
Ví dụ 2 ($P_f = 2.753\%$; $\beta = 1.918$)				
	c	Y		
Hàm f	31.65	21.10	1.916	
Hàm g	31.65	21.10	1.916	
Ví dụ 3 ($P_f = 0.056\%$; $\beta = 3.279$)				
	$E (\times 10^8)$	$I (\times 10^{-5})$	P	
Hàm f	1.917	4.274	808.4	3.279
Hàm g	1.917	4.274	808.4	3.279

Kết quả tính toán trong Bảng 1 cho thấy chỉ số độ tin cậy phụ thuộc vào giả định hàm phân phối của hàm trạng thái giới hạn. Khi giả định phân phối logarit chuẩn, chỉ số độ tin cậy cho giá trị lớn hơn.

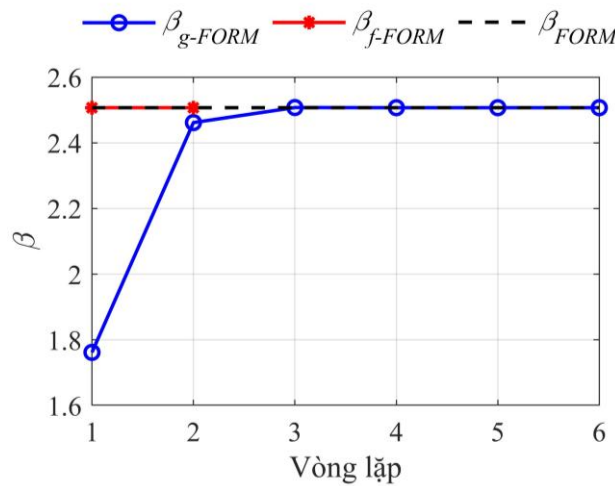
Lưu ý thêm là giá trị trung bình và độ lệch chuẩn thay đổi theo dạng hàm trạng thái giới hạn. Khi sử dụng các hàm tuyến tính, chỉ số độ tin cậy có xu hướng tăng lên so với hàm phi tuyến. Các nhận xét

này gợi ý rằng chỉ số độ tin cậy có xu hướng tăng lên khi sử dụng phân phối logarit chuẩn hay dùng hàm tuyến tính. Trong bài toán đánh giá an toàn theo chỉ số độ tin cậy, việc sử dụng các giá trị lớn hơn này có thể dẫn đến sự đánh giá thấp xác suất mất an toàn.

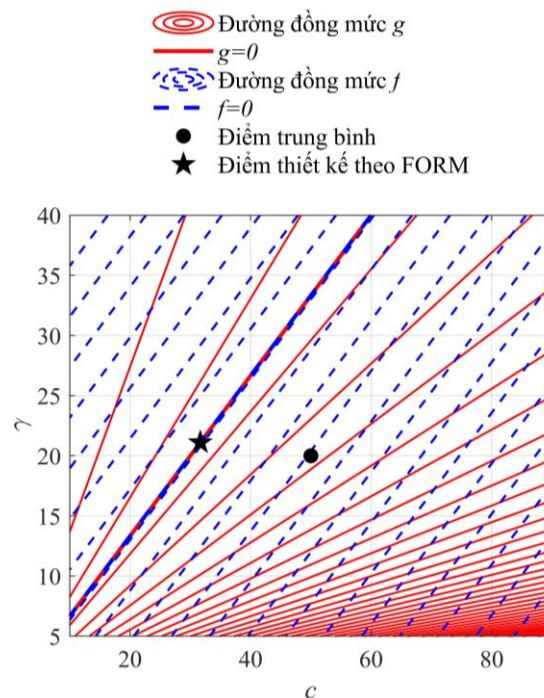
Tương tự, Bảng 2 tổng hợp kết quả tính toán theo FORM cho cả 3 ví dụ khi xét các dạng hàm trạng thái giới hạn khác nhau. Trong Bảng 2, các điểm thiết kế xác định được tại vòng lặp tối ưu cuối cùng cũng được ghi lại. Kết quả chỉ số độ tin cậy trong Bảng 2 cho thấy chỉ số độ tin cậy tính toán từ FORM không thay đổi bất kể dạng hàm được sử

dụng. Điều này đúng cho cả ba ví dụ được xem xét. Ngoài ra, các điểm thiết kế tính toán được khi sử dụng các hàm trạng thái khác nhau cũng trùng nhau, điều này xác nhận kết quả tính toán được từ FORM.

Hình 5 thể hiện quá trình tối ưu khi sử dụng FORM cho Ví dụ 1 sử dụng hàm f và g . Kết quả trên Hình 5 cho thấy, kết quả hội tụ nhanh khi sử dụng hàm tuyến tính. Khi sử dụng hàm phi tuyến, bài toán hội tụ sau ít nhất ba vòng lặp. Tuy nhiên kết quả cuối cùng là tương đồng khi sử dụng các hàm trạng thái khác nhau. Những đặc điểm này đều được thể hiện trong các ví dụ còn lại.



Hình 5. Ví dụ 1 - Kết quả tính toán theo FORM



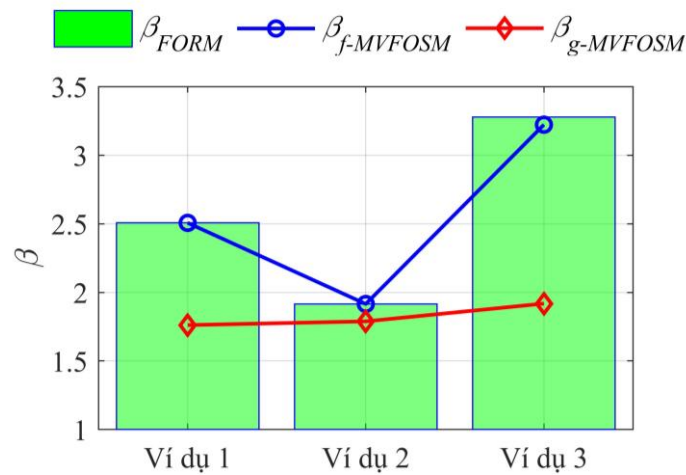
Hình 6. Ví dụ 2 - Đường đồng mức của các hàm trạng thái và vị trí điểm thiết kế theo FORM

Hình 6 minh họa các đường đồng mức của hàm trạng thái f (đường nét đứt màu xanh) và g (đường liền đỏ) cho Ví dụ 2. Điểm tròn màu đen biểu diễn điểm trung bình (điểm mà MVFOSM xấp xỉ các đạo hàm), ngôi sao màu đen thể hiện điểm thiết kế xác định được theo FORM (Bảng 2).

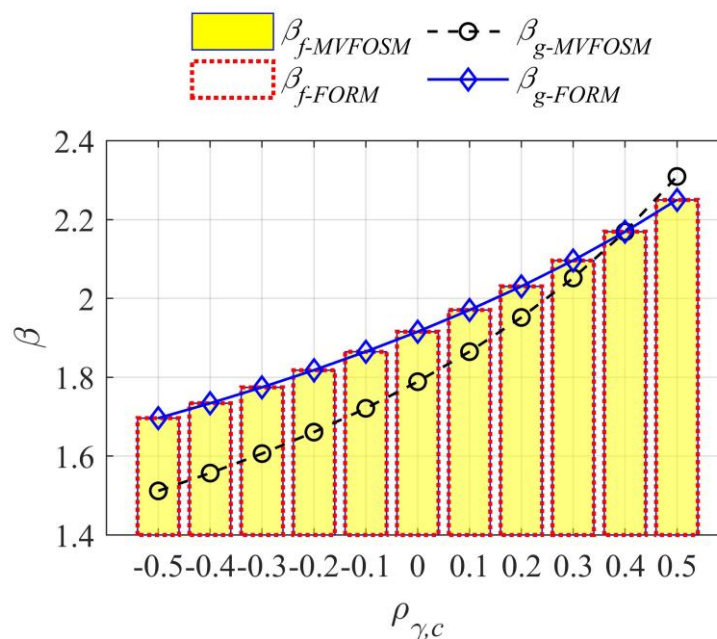
Các đường đồng mức của hàm g trên Hình 6 không song song cho thấy gradient của hàm trạng thái g sẽ thay đổi tùy theo vị trí của điểm lấy đạo hàm. Trái lại, đường đồng mức của hàm f là các đường thẳng song song, phản ánh tính chất gradient không đổi của một hàm tuyến tính. Sự khác biệt về gradient này giải thích sự sai lệch trong kết quả đánh giá độ tin cậy theo MVFOSM

(xem công thức (4)).

Hình 7 so sánh kết quả tính toán theo hai phương pháp cho ba ví dụ sử dụng cả hai dạng hàm. Trên hình vẽ, các biểu đồ cột thể hiện kết quả tính toán theo FORM cho cả hai hàm trạng thái giới hạn vì kết quả tính toán theo FORM không phụ thuộc dạng hàm. Kết quả tính toán theo MVFOSM được thể hiện bằng các đường liền trên hình vẽ. Kết quả tính toán theo hai phương pháp sử dụng các hàm trạng thái khác nhau cho thấy MVFOSM cho kết quả tương đồng với FORM cho cả ba ví dụ khi sử dụng hàm trạng thái có dạng tuyến tính. Tuy nhiên, khi sử dụng hàm trạng thái giới hạn phi tuyến, kết quả có xu hướng giảm đi.



Hình 7. Kết quả tính toán theo hai phương pháp cho 3 ví dụ



Hình 8. Chỉ số độ tin cậy khi xét tới tương quan các biến trong Ví dụ 2

Để xét ảnh hưởng tương quan giữa các biến tới kết quả tính toán theo hai phương pháp khi sử dụng các hàm trạng thái khác nhau, bài toán mái dốc đất sét đào thẳng đứng được mở rộng bằng cách xem xét hệ số tương quan giữa γ và c . Ở đây, các mức tương quan ρ từ -0.5 đến 0.5 được giả định để tính toán chỉ số độ tin cậy.

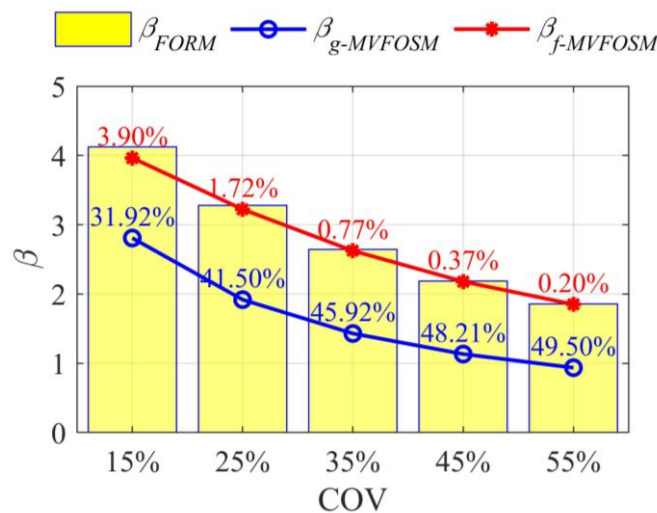
Hình 8 tổng hợp kết quả cho Ví dụ 2 khi xét các trường hợp tương quan khác nhau. Kết quả trên hình vẽ cho thấy, chỉ số độ tin cậy tính được khi dùng hàm tuyến tính là tương đồng bất kể sử dụng MVFOSM hay FORM. Tuy nhiên, kết quả tính toán theo MVFOSM cho kết quả nhỏ hơn so với FORM khi dùng hàm trạng thái phi tuyến. Ngoài ra, chỉ số độ tin cậy tính theo MVFOSM khi sử dụng hàm phi tuyến có xu hướng lớn hơn nghiệm từ FORM khi $\rho > 0.4$.

Để khảo sát ảnh hưởng của mức độ bất định tới kết quả tính toán theo hai phương pháp, dưới đây khảo sát kết quả chỉ số độ tin cậy cho các mức độ bất định khác nhau. Mức độ bất định thường

được đặc trưng qua hệ số phân tán (COV), được tính bằng tỷ lệ giữa độ lệch chuẩn và giá trị trung bình. COV lớn phản ánh mức độ bất định của biến và ngược lại. Với các biến được coi là tất định thì $COV = 0$.

Xét Ví dụ 3 với 5 mức độ bất định khác nhau của tải trọng P lần lượt là $0.15; 0.25; 0.35; 0.45; 0.55$. Ở đây, khoảng rộng của COV được lựa chọn nhằm khảo sát ảnh hưởng của mức độ bất định của biến đầu vào đến chỉ số độ tin cậy. Do đó, các giá trị COV lớn mang tính minh họa cho mục đích phân tích tham số.

Hình 9 thể hiện kết quả tính toán chỉ số độ tin cậy theo MVFOSM và FORM khi sử dụng các hàm trạng thái giới hạn khác nhau. Các biểu đồ cột thể hiện kết quả tính toán theo FORM, lưu ý là kết quả tính theo hai dạng hàm đều cho cùng kết quả. Hai biểu đồ đường lần lượt thể hiện kết quả tính toán chỉ số độ tin cậy theo MVFOSM khi sử dụng hàm tuyến tính và hàm phi tuyến. Các giá trị trên biểu đồ thể hiện sai số của MVFOSM so với FORM.



Hình 9. Ảnh hưởng của COV của lực P tới kết quả tính toán theo hai phương pháp cho Ví dụ 3

Kết quả trên Hình 9 cho thấy MVFOSM sai lệch đáng kể khi sử dụng hàm trạng thái phi tuyến. Lưu ý rằng, mức độ sai số còn tăng dần khi COV tăng dần. Tuy nhiên khi sử dụng hàm tuyến tính, MVFOSM cho kết quả tương đối tốt, tiệm cận với FORM.

5. Kết luận

Nghiên cứu này đã khảo sát đặc điểm và sự khác biệt giữa hai phương pháp phân tích độ tin

cậy phổ biến là MVFOSM và FORM thông qua ba ví dụ điển hình trong lĩnh vực kết cấu và địa kỹ thuật. Hai dạng hàm trạng thái giới hạn tương đương về mặt vật lý (dạng tuyến tính và dạng phi tuyến) đã được sử dụng song song để đánh giá mức độ ảnh hưởng của biểu diễn toán học tới chỉ số độ tin cậy tính toán.

Từ các kết quả thu được, một số kết luận chính được rút ra như sau:

(1) Chỉ số độ tin cậy theo MVFOSM phụ thuộc vào dạng hàm trạng thái và giả định phân phối.

Kết quả nghiên cứu cho thấy dạng biểu diễn của hàm trạng thái có ảnh hưởng đáng kể đến kết quả đánh giá độ tin cậy khi sử dụng phương pháp MVFOSM. Nguyên nhân chủ yếu xuất phát từ việc MVFOSM tính toán các đạo hàm của hàm trạng thái tại điểm trung bình của các biến ngẫu nhiên. Khi cùng một điều kiện an toàn được biểu diễn dưới các dạng hàm khác nhau, giá trị gradient tại điểm này có thể thay đổi tùy theo dạng hàm trạng thái, dẫn đến sự khác biệt trong việc xác định phương sai của hàm trạng thái và do đó ảnh hưởng đến chỉ số độ tin cậy. Ngoài ra, khi giả định phân phối lognormal, chỉ số độ tin cậy thường lớn hơn so với trường hợp giả định phân phối chuẩn. Kết quả cũng cho thấy khi biểu diễn hàm trạng thái dưới dạng tuyến tính, MVFOSM có xu hướng cho giá trị chỉ số độ tin cậy cao hơn so với dạng phi tuyến, mặc dù các dạng hàm này mô tả cùng một điều kiện an toàn.

(2) FORM không phụ thuộc vào dạng biểu diễn tương đương của hàm trạng thái giới hạn.

Khác với MVFOSM, FORM xác định điểm thiết kế trên bề mặt trạng thái giới hạn và sử dụng gradient tại chính điểm này để tính toán chỉ số độ tin cậy. Vì vậy, kết quả của FORM phản ánh trực tiếp hình học của biên trạng thái giới hạn và ít bị ảnh hưởng bởi dạng biểu diễn của hàm trạng thái. Kết quả tính toán cho cả ba ví dụ cho thấy chỉ số độ tin cậy và điểm thiết kế thu được từ FORM là như nhau khi sử dụng hai dạng hàm khác nhau. Điều này khẳng định tính bất biến của FORM đối với các phép biến đổi đại số tương đương của hàm trạng thái, đồng thời thể hiện tính ổn định và nhất quán của phương pháp. Tuy nhiên, các thuật toán tối ưu là cần thiết khi thực hiện FORM.

(3) Độ chính xác của MVFOSM phụ thuộc mạnh vào mức độ phi tuyến và mức độ bất định.

Khi mức độ bất định tăng lên (COV lớn), sai lệch giữa MVFOSM và FORM gia tăng rõ rệt, đặc biệt khi sử dụng hàm trạng thái phi tuyến. Ngược lại, trong trường hợp hàm tuyến tính hoặc mức độ

bất định nhỏ, MVFOSM cho kết quả gần với FORM. Điều này cho thấy MVFOSM phù hợp hơn cho các bài toán gần tuyến tính và có mức độ biến động nhỏ.

(4) Nguy cơ đánh giá thiếu xác suất mất an toàn khi sử dụng MVFOSM.

Do MVFOSM có xu hướng cho chỉ số độ tin cậy lớn hơn trong một số trường hợp (đặc biệt với giả định lognormal hoặc biểu diễn tuyến tính), việc sử dụng phương pháp này có thể dẫn đến đánh giá thấp xác suất mất an toàn nếu không xem xét đầy đủ mức độ phi tuyến và bất định của bài toán.

Từ các phân tích trên, có thể thấy rằng FORM là phương pháp có tính ổn định và độ tin cậy cao hơn trong các bài toán tổng quát, đặc biệt khi hàm trạng thái có tính phi tuyến hoặc mức độ bất định lớn. Trong khi đó, MVFOSM vẫn là một công cụ đơn giản, hiệu quả và chấp nhận được đối với các bài toán gần tuyến tính và có biến động nhỏ.

Khi có thể áp dụng các thuật toán tối ưu, FORM nên được sử dụng để xác định chỉ số độ tin cậy. Khi sử dụng MVFOSM, các hàm trạng thái có độ phi tuyến ít hơn nên được sử dụng để giảm bớt sai số của kết quả. Do phạm vi của nghiên cứu, phương pháp MCS không được trình bày chi tiết ở đây, một số kỹ thuật mô phỏng có thể tham khảo trong các nghiên cứu trước [7, 8, 10, 11, 16].

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.01-2025.28.

Tài liệu tham khảo

- [1] A. Haldar, S. Mahadevan. (1999). *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*. John Wiley.
- [2] M. Holický. (2009). *Reliability analysis for structural design*. 1st ed. SUN Press. doi: 10.18820/9781920689346
- [3] A.S. Nowak, K.R. Collins. (2013). *Reliability of structures*. 2nd ed. CRC Press.
- [4] T.M. Allen, A.S. Nowak, R.J. Bathurst. (2005). *Calibration to Determine Load and Resistance Factors for Geotechnical and Structural Design*.

- Transportation Research Circular EC079. *Transportation Research Board*.
- [5] N.S. Doan, J. Huh, V.H. Mac, D. Kim, K. Kwak. (2020). Probabilistic risk evaluation for overall stability of composite caisson breakwaters in Korea. *Journal of Marine Science and Engineering*, 8(3), 148. <https://doi.org/10.3390/jmse8030148>
- [6] J. Ji, B.K. Low. Stratified Response Surfaces for System Probabilistic Evaluation of Slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 138(11). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000711](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000711)
- [7] P.X. Tùng, T.Q. Huy, Đ.Q. Mỹ, T.T. Chung. (2024). Đánh giá độ tin cậy chuyển vị đỉnh khung thép không gian dưới tác dụng của tải trọng gió. *Tạp chí điện tử Khoa học và Công nghệ Giao thông*, 4(4), 67-75. <https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2024.vn.4.4.67-75>
- [8] N.H. Ân, C.V. Vui. (2023). Phân tích độ tin cậy về ứng xử của ống thép nhồi bê tông chịu nén dọc trục. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, 17(4V). [https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17\(4V\)-07](https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17(4V)-07)
- [9] N.V. Phó, L.N. Thạch, C.T. Bình. (2011). Độ tin cậy phụ thuộc thời gian của công trình. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, 5(1), 5-16.
- [10] N.V. Vi. (2024). Xác định số lần thử nghiệm N đủ lớn khi tính toán độ tin cậy của công trình theo phương pháp thống kê từng bước. *Tạp chí điện tử Khoa học và Công nghệ Giao thông*, 4(1), 36-45. <https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2024.vn.4.1.36-45>
- [11] N.D. Duẩn, N.T. Hà. (2024). Đánh giá độ tin cậy của cột thép tiết diện thay đổi sử dụng kết hợp thuật toán nơ-ron nhân tạo (ANN) và mô phỏng Monte Carlo (MCS). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, 18(2V), 157-169. [https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18\(2v\)-13](https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18(2v)-13)
- [12] T.A. Tuấn. (2023). Ứng dụng chuỗi Taylor trong tính toán độ tin cậy kết cấu dàn. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải*, 74, 76-80.
- [13] O. Ditlevsen, H.O. Madsen. (2005). Structural Reliability Methods. *Technical University of Denmark*.
- [14] G.B. Baecher, J.T. Christian. (2003). Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering. *John Wiley and Sons*.
- [15] ASCE. (2017). ASCE STANDARD ASCE/SEI 7-16 Minimum Design Loads and Associated Criteria for Buildings and Other Structures. <https://doi.org/10.1061/9780784414248>
- [16] N.S. Doan, A.T. Tran. (2025). Comparative Study on the Probabilistic Safety of Truss Structures Designed Using U.S. and Vietnamese Codes. *Journal of Science and Transport Technology*, 5(1), 1-14. <https://doi.org/10.58845/jstt.utt.2025.en.5.1.1-14>
- [17] Đ.Đ. Kiến, H.K. Vũ, N.S. Hà. (2020). Thiết kế kết cấu thép theo quy phạm Hoa Kỳ AISC 360-10. *Nhà xuất bản Xây dựng*.